PLANUDES
RECHENBUCH

Das

RECHENBUCH

des

Maximus Planudes

(*ΜΑΞΙΜΟΥ ΜΟΝΑΧΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΝΟΥΔΗ ΨΗΦΟΦΟΡΙΑ ΚΑΤ' ΙΝΔΟΥΣ Η ΛΕΓΟΜΕΝΗ ΜΕΓΑΛΗ*).

Nach den Handschriften der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1865.

1866, Dec. 18.
Salisbury Fund.

Der Mönch Maximus Planudes, allgemeiner bekannt als Compilator einer unter dem Titel: Anthologia graeca, vorhandenen Epigrammensammlung, lebte in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts. Nur wenig Näheres lässt sich über ihn berichten. Er stammte aus Nikomedia, hielt sich aber vorzugsweise in Constantinopel auf Der Kaiser Andronikus Palaeologus der Aeltere übertrug ihm als einem durch Gelehrsamkeit ausgezeichneten Mann, zugleich mit Leo Orphanotrophus, im Jahre 1327 eine Gesandtschaft an die Republik Venedig. Sein Todesjahr steht nicht fest; wir wissen nur dass er im Jahre 1352 noch lebte.

Planudes war ein sehr fruchtbarer Schriftsteller; er übersetzte namentlich viele Werke römischer Autoren ins Griechische. Hier ist zu erwähnen, dass er ausser wenig erheblichen Scholien zu den beiden ersten Büchern der Arithmetica Diophant's, die Xylander in seiner lateinischen Uebersetzung des Diophant (Basel 1575) veröffentlichte, die folgende Schrift: *Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη*, verfasst hat. Sie ist bisher ungedruckt geblieben, wird aber häufig in den Untersuchungen über die Entstehung und Ausbreitung unsers Zahlensystems genannt, insofern der eben angeführte Titel derselben als Beweis gebraucht wird, dass unser Zahlensystem indischen Ursprungs ist.

Da Planudes ausdrücklich sagt, dass er seine Anweisung zum Rechnen *κατ' Ἰνδοὺς* verfasst habe, so entsteht zunächst die Frage: haben ihm indische Schriften über Arithmetik vorgelegen, nach welchen er arbeitete? Er selbst äussert sich nicht darüber; nach dem aber, was wir von den arithmetischen Schriften der Inder wissen *), haben wir alle Ursache die obige Frage zu verneinen. Vielmehr liegt die

*) Die arithmetischen Werke der Inder sind in Versen geschrieben; Ziffern kommen darin nicht vor. Sie werden durch eigenthümliche Wörter, die Zahlen bedeuten, vertreten. Vergl. meine Abhandlung: Etudes historiques sur l'arithmétique de position im Programm des Collège royal français de l'an. 1856.

Vermuthung nahe, dass Maximus Planudes die Zahlzeichen und Rechnungsweise der Inder durch byzantinische Kaufleute oder Missionare, die längere Zeit in Indien sich aufgehalten hatten, kennen lernte und wohl bewandert mit dem Zustand der mathematischen Wissenschaften seiner Zeit, die grossen Vorzüge der indischen Arithmetik vor den andern damals üblichen Rechnungsmethoden begriff. In der That, seitdem Byzanz im Jahre 330 Hauptstadt des oströmischen Reiches geworden, spaltete sich der Handelsweg, der aus Indien über Alexandrien nach dem Westen ging, in zwei Richtungen, nach Byzanz und nach Rom. Der letztere kam indess sehr bald durch den Untergang des weströmischen Reiches im Jahre 476 in Verfall. Auch der Handelsweg über Alexandrien erlitt eine Abänderung, als die Araber unter den Chalifen Omar im Jahre 640 Ägypten eroberten; seitdem ging der Waarenzug aus Indien nach Byzanz zu Lande von Bassora aus über Trapezunt, ein anderer Weg führte nördlich vom Kaukasus durch das kaspische Meer. Dieser Jahrhunderte hindurch fortgesetzte Verkehr brachte Byzanz in eine sehr innige Verbindung mit Indien. Der Patriarch Nikephorus, der zu Anfang des 9. Jahrhunderts lebte, berichtet dass unter dem Kaiser Justinian sogar ein Brahmane nach Constantinopel kam, und mehrere Jahrhunderte später erzählt der kaiserliche Geschichtsschreiber Joannes Kantakuzenos, dass ein Fürst der Triballer, Krates, sich gegen den byzantinischen Kaiser empörte, aber von dem kaiserlichen Heere geschlagen sich in Thracien nicht mehr sicher glaubte und deshalb nach Indien entfloh (Lassen, Indische Alterthumskunde Bd. IV. S. 906 ff.).

Die Ziffern, die Planudes in den Rechnungsbeispielen durchgängig und in dem Text fast immer gebraucht, sind die Anfangsbuchstaben der entsprechenden indischen Zahlwörter; dies zeigt sofort eine Vergleichung mit der letzten Reihe der Initial letters modern, die in Prinsep's Essays of Indian Antiquities Tom. II. pl. XL zusammengestellt sind *). Es erhält demnach die Annahme Prinsep's, der bekanntlich zuerst behauptete, dass die indischen Ziffern aus den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter hervorgegangen seien, eine glänzende Unterstützung. Durch die ausdauernden Bemühungen der Indianisten ist ermittelt, dass die Inder anfangs eine

---

*) In Betreff der Zeichen für 4 und 5 finden unbedeutende Verschiedenheiten statt. Jedoch bemerkt Pihan (Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes. Paris 1860, p. 69) dass dasselbe Zeichen für 5, welches Planudes gebraucht, gegenwärtig in Indien allgemein üblich ist.

Zahlbezeichnung hatten, in der keine Spur von Positionswerth der Ziffern gefunden wird. Alle diese alten Zahlzeichen sind demnach für die Geschichte unsers Zahlensystems gleichgültig; sie können höchstens zur Betrachtung kommen, wenn es sich um die Frage handelt, ob die Ziffern mit Positionswerth daraus hervorgegangen sind, eine Frage, die bei den grossen Veränderungen, welche die indische Schrift nach und nach erlitten hat, sich schwer wird beantworten lassen. Der Engländer Thomas, Herausgeber der oben genannten Essays Prinsep's, zeigt in seiner neuesten „Note on Indian Numerals" (Journal Asiatique de l'an. 1863), dass diese ältern indischen Ziffern bis ins 4. Jahrh. nach Chr. in Gebrauch waren, dass dagegen die neuern indischen Ziffern mit Positionswerth vor dem 7. Jahrh. nicht nachweisbar sind *). Demnach wird die Epoche der Entdeckung des Positionssystems in die Zeit vom 4. bis zum 7. Jahrh. zu setzen sein **).

Ausser den indischen Ziffern kennt auch Planudes die Hülfsmittel, deren sich die Inder bei der Ausführung ihrer Rechnungen bedienten. Bevor nämlich Planudes ein zweites Multiplicationsverfahren auseinandersetzt, schickt er die Bemerkung voraus, dass dasselbe sich weniger eigene durch Dinte auf Papier bewirkt zu werden, als vielmehr auf einer mit Sand bestreuten Tafel, die er bei dieser Gelegenheit

*) Der freundlichen Mittheilung des Herrn Prof. Weber in Berlin verdanke ich das genannte Memoire von Thomas. Vergl. auch Weber, Indische Skizzen, Berlin 1857, S. 140.

**) Durch Villoison (Anecdot. graec. Tom. II.) ist nach zwei Handschriften der S. Marcus-Bibliothek n. 303 und n. 323 der Anfang der in Rede stehenden Schrift des Maximus Planudes zugleich mit den darin befindlichen Ziffern bekannt gemacht worden. In beiden sind die neun Zahlzeichen von sehr verschiedener Gestalt; die in der Handschrift n. 303 gleichen theilweise den gobâr-Ziffern (Piban, Exposé p. 209), die in n. 323 sind den in den Pariser Codices enthaltenen noch am meisten ähnlich. Die letzteren geben die Ziffern mit einer ganz unwesentlichen Verschiedenheit für das Zahlzeichen 5 durchaus übereinstimmend. Auch das Bruchstück im Codex Gudianus des Diophant hat dieselben Formen wie die Pariser Handschriften. Da nun Planudes indische Ziffern gebraucht und da die Zahlzeichen in den Pariser Handschriften die genauen Formen der Anfangsbuchstaben der indischen Zahlwörter darbieten, so sind jedenfalls die Ziffern in den Pariser Manuscripten diejenigen, die Planudes in der Originalhandschrift geschrieben, die dagegen in den Venetianischen Handschriften von Abschreibern, wie sie zu ihrer Zeit gebräuchlich waren, hineingetragen. Es verdient dies deshalb hervorgehoben zu werden, weil bisher öfters lediglich nach der Form der Zahlzeichen das Vorkommen eines Zahlensystems zu einer gewissen Zeit beurtheilt worden ist. Die äussere Gestalt der Zahlzeichen, die wegen des täglichen Gebrauchs im Lauf der Zeit so manche Veränderung erlitten, giebt keinen sichern Anhalt, wohl aber grössere Zahlen- und ausgeführte Rechnungsbeispiele.

auch für andere Rechnungsoperationen empfiehlt. Nun wissen wir aus der Einleitung, die Taylor seiner Uebersetzung der Lilawati des Bhascara Acharya *) hinzugefügt hat, dass die Inder auf einer weiss angestrichenen Tafel von ohngefähr 12 Zoll Länge und 8 Zoll Breite, die mit Sand oder mit einem roth gefärbten Mehl (indisch gulal) bedeckt wurde, rechneten **). Zum Schreiben der Ziffern bedienten sie sich eines hölzernen Griffels, durch den sie den Sand oder das Mehl bei Seite schoben, so dass auf dem weissen Grunde die Zahlzeichen sichtbar wurden. Die Beseitigung der Ziffern konnte leicht durch Darüberhinfahren mit dem Finger bewirkt und so die Tafel zur Aufnahme neuer Zahlzeichen geeignet gemacht werden. Dies war um so nothwendiger, als die Ziffern, um sie deutlich zu machen, gross geschrieben werden mussten, und der Raum auf der Tafel verhältnissmässig beschränkt war; daher denn auch die Praxis, dass alle Zwischenstufen der Rechnungen verschwinden und allein das letzte Resultat auf der Tafel sich findet.

Die bereits erwähnte Einleitung zur Uebersetzung der Lilawati enthält eine Zusammenstellung der Rechnungsoperationen der Inder. Vergleicht man sie mit den entsprechenden im Rechenbuch des Planudes, so ergiebt sich, dass derselbe ausser den Mittheilungen, die über die indische Arithmetik ihm zugekommen waren, noch andere Quellen benutzt hat. Höchst wahrscheinlich hatte Planudes während seine Aufenthalts in Venedig die Rechnungen mit Positionsziffern, wie sie namentlich durch den grossen Pisaner Fibonacci seit länger als einem Jahrhundert in Italien eingebürgert waren, kennen gelernt, und er nahm das was ihm zweckmässig schien, in seiner Schrift auf. Es ist bekannt, dass Fibonacci seine arithmetischen Kenntnisse, die er in seiner Jugend bei den Arabern auf der Nordküste Afrikas und auf seinen spätern Reisen erworben hatte, in dem grossen Werke: Liber Abbaci, das seit kurzem durch die nicht genug zu preisende Liberalität des Prinzen Boncompagni den Gelehrten zugänglich gemacht ist, niedergelegt hat. Wir finden demnach jedenfalls die Abänderungen und Vervollkommnungen, welche die Araber in den indischen Rechnungsoperationen angebracht haben, bei Fibonacci. Sie sind denn auch

*) Lilawati, or a treatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya. Translated from the original sanscrit by John Taylor. Bombay 1816.

**) Auch Fibonacci rechnete auf einer weiss angestrichenen Tafel; es heisst in Liber Abbaci di Leonardo Pisano pubblicat. da B. Boncampagni, Roma 1857, p. 7: ut si quesierit multiplicationem de 12 in 12, scribantur 12 bis in tabula dealbata, in qua littere leviter deleantur.

von Planudes entlehnt worden *); es gehört unter andern dahin, dass der letztere stets das Resultat der Rechnung über den zu addirenden oder subtrahirenden Zahlen setzt, dass ferner die Richtigkeit der Rechnung durch die Neunerprobe bewiesen wird, die den Indern unbekannt ist **). In den Abschnitten über Thierkreisrechnung und über die Ausziehung der Quadratwurzel hat Planudes auch griechische Quellen benutzt, namentlich Theon's Commentar zum Almagest des Ptolemäus. —

Das Bisherige dürfte genügen um einen Standpunkt zu gewinnen, von dem aus das Rechenbuch des Planudes zu beurtheilen ist. Es mag nun eine möglichst ausführliche Angabe des Inhalts folgen. Zuerst ist zu erwähnen, dass Planudes sich bestrebt, gegenüber den Anweisungen zum Rechnen die in damaliger Zeit lediglich für Kaufleute geschrieben wurden, seiner Schrift eine wissenschaftliche Haltung zu verleihen. Er will die Rechnungen zur Sprache bringen, die für die Astronomie nothwendig sind; sein Rechenbuch soll aber alles dahin Gehörige enthalten und daraus ist vielleicht der Zusatz im Titel: ἡ λεγομένη μεγάλη, zu erklären.

Planudes beginnt mit der Auseinandersetzung, dass mit Hülfe von neun Zahlzeichen und der Null, deren Erfindung den Indern zu verdanken ist, jede noch so grosse Zahl ausgedrückt werden könne. Diese neun Zahlzeichen haben eine zwiefache Bedeutung: eine absolute, die sie auch behalten wenn sie in Verbindung mit andern Zahlzeichen in erster Stelle von rechts gerechnet stehen, und eine von der jedesmaligen Stelle zwischen den übrigen Ziffern abhängige. Nachdem dies Planudes hinreichend an einem Beispiel erläutert und auch die Bedeutung der Null dargethan hat, bemerkt er dass die Kenntniss von sechs arithmetischen Operationen für die Astronomie nöthig ist: die Lehre von den Zahlzeichen (Numeration), Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Ausziehung der Quadratwurzel. Da von der ersten bereits gehandelt ist, so geht er sofort zur Addition. Planudes lehrt hier dasselbe Verfahren, welches gegenwärtig üblich ist; bemerkenswerth ist nur, dass er, wie schon erwähnt, ebenso wie Fibonacci die Summe über den Summanden schreibt. Die Richtigkeit der Rechnung wird durch die Neunerprobe, die sich ebenfalls bei

*) Es soll hiermit nicht behauptet werden, dass Planudes das Werk Fibonacci's benutzt habe Aber wir wissen durch Libri (Hist. des sciences mathem. en Italie Tom. II. p. 44), dass Fibonacci eine blühende Schule gebildet hatte, die in seinem Geiste fortwirkte.

**) Taylor in der Einleitung zur Lilawati p. 7: The Hindus seem to be entirely ignorant of the method of proving addition by rejecting the nines.

Fibonacci findet, dargethan. — Bei der Subtraction befolgt Planudes dieselbe Anordnung wie bei der Addition: er schreibt die Differenz über dem Minuendus. Für den Fall dass eine grössere Zahl im Subtrahendus von der entsprechenden kleineren des Minuendus zu subtrahiren ist, giebt Planudes zwei Anweisungen; in der ersten addirt er zu der vorhergehenden Zahl im Subtrahendus eine Einheit, verbindet diese als Zehner mit der in Rede stehenden Zahl des Minuendus und führt die Subtraction aus *); die zweite ist die gegenwärtig allgemein übliche. Die Richtigkeit der Subtraction wird dadurch dargethan, dass die Summe der Differenz und des Subtrahendus dem Minuendus gleich ist.

Auch bei der Multiplication schreibt Planudes das Product über den beiden zu multiplicirenden Zahlen. In Betreff der Multiplication selbst giebt er zwei Methoden. Die erste ist die *κατὰ χιασμὸν* d. h. übers Kreuz. Sie lässt sich am besten an einem Beispiel deutlich machen. Es sei 264 mit 432 zu multipliciren:

	114048	
	432	
	264	
2×4	8	8
2×6	12	24
4×3	12	
2×2	4	
4×4	16	38
3×6	18	
3×2	6	30
6×4	24	
4×2	8	8
		114048

Haben die beiden zu multiplicirenden Zahlen nicht gleich viel Ziffern, so setzt Planudes derjenigen mit weniger Ziffern so viele Nullen vor, bis beide Zahlen aus

*) Dies Verfahren findet sich bei arabischen Mathematikern, z. B. in der Arithmetik des Abul Hasan Ali Ben Mohammed Alkalsadi. Eine Uebersetzung dieser Schrift, deren Verfasser im Jahr 1486 starb, verdanken wir Wöpcke (Rome 1859).

gleich vielen Ziffern bestehen, offenbar um in der Reihenfolge der Operationen keinen Fehler zu begehen. Uebrigens ist zu bemerken, dass Planudes nicht, wie in obigem Beispiel, die Partialproducte niederschreibt, er führt vielmehr die Additionen sofort aus und notirt nur die für das Product nöthigen Ziffern, so dass am Ende der ganzen Operation lediglich das Product erscheint. Die Richtigkeit des Resultats wird ebenfalls durch die Neunerprobe dargethan. Der zweiten Multiplicationsmethode schickt Planudes die bereits erwähnte Bemerkung voraus, dass sie sich weniger eigene auf Papier durch Dinte, als vielmehr auf einer mit Sand bestreuten Tafel ausgeführt zu werden. Er erläutert sie an dem folgenden Beispiel, wobei er genau so verfährt, wie von den Indern berichtet wird *). Es soll 654 mit sich selbst multiplicirt werden.

7
75
31
2491
492406
360654
654
654
654

Beide Methoden finden sich bei Fibonacci.

In Betreff der Division unterscheidet Planudes drei Fälle: wenn der Divisos grösser, gleich oder kleiner ist als der Dividendus. Den ersten Fall, bei dem einiger von den Brüchen beigebracht wird, behandelt er auf folgende Weise: er theilt jede Einheit des Dividendus in so viele Theile als der Divisor Einheiten enthält; dadurch wird der Dividendus die grössere Zahl, und die Division kann vollendet werden. Um z. B. 3 durch 5 zu dividiren, theilt Planudes jede Einheit von 3 in 5 Theile, also $3 = \frac{15}{5}$, und dividirt alsdann 15 durch 5. Er führt demnach diesen Fall auf den zurück, in welchem der Divisor kleiner als der Dividendus; es findet nur der

*) Nach der Angabe Taylor's bedienen sich ihrer vorzugsweise die indischen Astronomen (Though this method must appear very complicated and confused to an European arithmetician, it is the one which is most generally practised by the Jyotishis, or astronomers. Einleitung zur Lilawati, p. 10). Höchst wahrscheinlich ist es dasselbe Verfahren, das von den Arabern die Multiplication des Umgürtens genannt wird, insofern die Ziffern des Products, wenn die Operation vollständig hingeschrieben wird, am Umfang der Rechnung erscheinen Siehe Beha-eddin's Essenz der Rechenkunst, herausgegeben von Nesselmann, S. 12.

Unterschied statt, dass im ersten Fall Bruchtheile, im letztern Einheiten als Quotienten erscheinen. Ist der Divisor kleiner als der Dividendus, so unterscheidet Planudes mehrere Fälle: 1) wenn der Divisor kleiner als 10; 2) wenn der Divisor 10, 20, 30 ..... 90 ist; 3) wenn er aus Zehnern und Einheiten zusammengesetzt ist; 4) wenn er = 100; 5) wenn er aus 100 und Zehnern besteht; 6) wenn er aus 100, Zehnern und Einheiten zusammengesetzt ist. Was die Ausführung der Division anlangt, so schreibt Planudes den Divisor unter den Dividendus, so dass ein kleiner Raum dazwischen bleibt, in dem der Quotient zu stehen kommt. Die beiden ersten Fälle, in welchen der Divisor kleiner als 10 oder 10, 20, 30 .... 90 ist, unterscheiden sich hinsichtlich der Ausführung der Division nicht wesentlich von dem gegenwärtigen Verfahren. Der dritte Fall dagegen, in welchem der Divisor aus Zehnern und Einheiten besteht, wird von Planudes auf folgende Weise behandelt. Um z. B. 856978 durch 24 zu dividiren, gestaltet sich die Ausführung so:

```
         13  16
   2      2   21    3
8    5    6    9   7   8  10
3    5    7    0   7
24
```

oder auf gewöhnliche Weise ausgedrückt:

```
856978 : 24 = 35707
6
--
25
12
--
13
10
---
 36
 20
 --
 16
 14
 ---
  29
  28
  --
   1
   0
  --
  17
   0
  --
  17
   14
   --
   38
   28
   --
   10
```

Es ist zu bemerken, dass das Manuscript an der Stelle, wo der Quotient 0 erscheint, unklar oder lückenhaft ist. Dasselbe wiederholt sich in dem letzten Beispiel, in welchem 272453 durch 27 dividirt wird. — Die drei letzten der oben aufgezählten Fälle werden von Planudes nicht behandelt. — Das Verfahren des Planudes ist im Wesentlichen dasselbe, dessen sich die Araber bedienen (Behaeddin, Essenz der Rechenkunst, S. 14). Von den Indern wird die Division auf andere Weise ausgeführt (Lilawati p. 11).

Hierauf folgt ein Abschnitt, in dem über die vier Species in Theilen des Thierkreises gehandelt wird. Bei der Addition und Subtraction verfährt Planudes so wie wir in der Rechnung mit benannten Zahlen. Für die Multiplication schickt er die Regel ohne Beweis voraus, dass, wenn man Grade mit Graden, Minuten, Secunden multiplicirt, als Product Grade, Minuten, Secunden gefunden werden, dass dagegen Minuten mit Minuten mul-

tiplicirt, Secunden ergehen, Minuten mit Secunden, Tertien u. s. w. Er erläutert sie an dem folgenden Beispiel; es soll 14° 23′ mit 8° 16′ multiplicirt werden:

	14°	23′	
	8°	16′	
	112°	224′	
		184′	368″
3 Bild.	28°	54′	8″

Während Planudes in Betreff der Multiplication genau das Verfahren Theon's in seinem Commentar zum Almagest des Ptolemäus befolgt (Nesselmann, die Algebra der Griechen, S. 138 ff.), schlägt er für die Division einen andern Weg ein. Er verwandelt die Grade, Minuten, Secunden des Dividendus und Divisors in Secunden, und führt alsdann die Division aus. Als Quotient findet er Grade, weil nur Secunden, mit Graden multiplicirt, Secunden geben. Den Rest multiplicirt Planudes mit 60 und verwandelt ihn so in Tertien; er dividirt von Neuem und erhält als Quotient Minuten, weil Minuten, mit Secunden multiplicirt, Tertien geben u. s. w.

Ueher die Ausziehung der Quadratwurzel ist Planudes sehr ausführlich; fast die Hälfte seines Rechenbuchs ist ihr gewidmet. Er beginnt ebenso wie Theon mit der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl *), und gieht dazu folgende Regel, die sich auch bei Fibonacci findet: Man nehme die Wurzel der nächst kleineren Quadratzahl, subtrahire deren Quadrat von der gegehenen Zahl und dividire den Rest durch das Doppelte der Wurzel; dieser Bruch ist zur Wurzel hinzuzunehmen. Diesem nach setzt er $\sqrt{18} = 4\frac{1}{4}$. Ohwohl die angegehene Wurzel nicht genau ist, wie aus der Quadraterhebung derselhen folgt, und ohwohl er selbst die Methode als zu einfältig und zu grob und ein zu wenig der Wahrheit nahe kommendes Resultat gehend (*ἁπλουστέρα καὶ ὁλοσχερεστέρα καὶ ἧττον ἀκριβείας μετέχουσα*) bezeichnet, so will er sie doch, bevor er eine genauere Methode seiner eigenen Erfindung mittheilt, vorläufig beibehalten, um die Wurzeln grösserer Zahlen zu hestimmen. Planudes theilt zu diesem Behuf die Zahlen in Klassen (je nachdem die Wurzeln aus einer, zwei, drei u. s. w. Ziffern bestehen) von 1 bis 99, von 100 bis 9999, von 10000 his 999999 u. s. w. Da er ein Beispiel aus der ersten Klasse hereits gegeben, so findet er $\sqrt{235} = 15\frac{1}{3}$. Als Zahl der dritten Klasse wählt er 421354 und setzt die Quadratwurzel derselben $= 649\frac{153}{1298}$. Bei diesem Beispiel erwähnt Planudes, warum nicht zuerst aus 4, sondern aus 42 die Wurzel gezogen werden müsse: hesteht die Zahl aus einer geraden Anzahl Ziffern, so sind die heiden ersten zu nehmen; ist die Anzahl der Ziffern ungerade, nur die erste, und er fügt auch den Grund dieser Regel hinzu. Planudes geht zur Bestimmung einer vierziffe-

*) Nesselmann, die Algebra der Griechen, S. 144 ff.

rigen Wurzel weiter; das Verfahren, die vierte und fünfte Ziffer der Wurzel zu finden, beansprucht er als seine Erfindung. Er wählt die Zahl 16900963 und operirt, wenn die gegenwärtig übliche Weise der Division beobachtet wird, folgendermassen:

$\sqrt{16900963} = 411$

```
   16
8 | 9
    8
   10
    1
82 | 9
     8
    10
     2
     8
     1
     7
```

So weit befolgt Planudes das frühere Verfahren; weiter hilft er sich durch Probiren. Er sagt: Setze ich 2 zu 411, so ist 4112 als Wurzel zu gross; deshalb setze ich 1 hinzu, also 4111, deren Quadrat = 16900321 die nächste Quadratzahl von 16900963 ist. Die Rechtfertigung der letzten 1 geschieht auf eigenthümliche Weise: er betrachtet die übrigbleihenden Ziffern 7, 9, 6, 3 nicht als dekadische, sondern einzeln, und setzt

```
7 + 9 = 16
        8
      8 6 3
      2 2 1
      6 4 2
```

Diese drei Ziffern 6, 4, 2 bilden den Zähler, das Doppelte der Wurzel den Nenner des Bruchs, der zu 4111 hinzuzunehmen ist. Ebenso findet er $\sqrt{1690196789} = 41112\frac{345}{82224}$.

Bevor Planudes zu seiner eigenen Methode übergeht, zeigt er, dass die vorhergehende nicht im Stande sei, der Wahrheit sehr nahe zu kommen. Er führt den Beweis sowohl durch Zahlen als auch geometrisch. Es müsse z. B. nach der vorhergehenden Methode $\sqrt{24} = 4\frac{8}{8} = 5$ sein, was offenbar unrichtig ist. Der geometrische Beweis geschieht mittelst des Satzes von dem Quadrat über der Summe zweier Linien. In Betreff seiner eigenen Methode verfährt Planudes auf folgende Weise. Er nimmt die Zahl 6, löst sie in Secunden auf = 21600 und zieht daraus wie oben die Quadratwurzel; er findet 146 Minuten = 2 Grade 26 Minuten, d. h. $2\frac{13}{30}$ als Quadratwurzel aus 6 *). Dass dies richtig sei, wird nun auch geometrisch nach dem oben angeführten Satze dargethan. Planudes bemerkt dabei, dass, wenn man aus einer nicht vollständigen Quadratzahl die Wurzel zieht, immer etwas vernachlässigt wird, auch wenn noch so genau verfahren würde, und erläutert dies ebenfalls durch die Figur.

Zuletzt giebt Planudes noch eine Methode an, die aus der indischen **), aus der Theon's und der seinigen combinirt ist, denn die vorhergehende sei für grosse Zahlen, insofern sie in Secunden aufgelöst würden, sehr unbequem. Um aus 4500

---

*) $2\frac{13}{30} = 2{,}433\ldots$; das genauere Resultat $\sqrt{6} = 2{,}449\ldots$

**) Welche von den vorhergehenden Methoden Planudes als indisch bezeichnet, ist nicht deutlich. In dem Commentar zur Lilawati findet sich nur ein Beispiel für die Ausziehung der Quadratwurzel und zwar aus der Quadratzahl 88209.

die Wurzel auszuziehen, verfährt er also: Er findet zu 4500 die Wurzel 67; den Rest 11 löst er in 660 Minuten auf, verdoppelt 67 = 134 und dividirt 660 durch 134. Er erhält als Quotient 4, als Rest 124 = 7440 Secunden; davon $4^2 = 16$ subtrahirt, bleibt 7424. Dies wird in Tertien aufgelöst = 445440, desgleichen 134 mit 60 multiplicirt und 2. 4 hinzuaddirt = 8048; durch diese letztere Zahl wird 445440 dividirt und es ergiebt sich 55 als Quotient. Demnach ist die Wurzel zu 4500 = 67° 4′ 55″.

Den Schluss bilden, wie es meistens auch in den arabischen Rechenbüchern der Fall ist, zwei Aufgaben. Zur Lösung der ersten schickt Planudes das Theorem voraus, dass $a^2 - 1$ sowohl durch $a + 1$ als $a - 1$ ohne Rest dividirt werden kann; er setzt hinzu, dass, wenn $2 + \frac{a^2 - 1}{a + 1}$ von $a^2 - 1$ subtrahirt wird, der Rest $a^2 - a - 2$ wiederum durch $a + 1$ und $a - 2$ theilbar ist, dass, wenn man ferner $3 + \frac{a^2 - a - 2}{a + 1}$ von $a^2 - a - 2$ subtrahirt, der Rest $a^2 - 2a - 3$ ebenfalls durch $a + 1$ und $a - 3$ dividirt werden könne u. s. w. Das erste Problem lautet: Ein sterbender Vater will seine Goldstücke unter seine Söhne gleich vertheilen; er sagt zu ihnen: Der erste erhält ein Stück und den siebenten Theil des Restes, der zweite zwei Stücke und den siebenten Theil des Restes, der dritte drei Stücke und den siebenten Theil des Restes. Hier stirbt der Vater. Es fragt sich, wie viele Söhne er hatte, und wie viele Goldstücke er hinterliess. Da die Söhne immer den siebenten Theil des Restes nehmen sollen, so setzt Planudes $a + 1 = 7$, also $a = 6$, $a^2 = 36$. Es wird demnach 6 die Anzahl der Kinder, 36 die Zahl der Goldstücke sein.

Die zweite Aufgabe heisst: Ein Rechteck zu finden, das einem andern an Umfang gleich, an Inhalt aber ein Vielfaches desselben ist. Planudes giebt zwei Lösungen; die erste gilt für einen speciellen Fall, die andere ist allgemein. In der ersten nimmt er an, es soll das eine Rechteck viermal so gross sein als das andere. Er setzt deshalb $4^3 - 1 = 63$ als den halben Umfang eines jeden der Rechtecke, und zerfällt 63 in 60 + 3 und in 48 + 15. Die beiden ersten Summanden sind die Seiten des einen, die beiden andern die Seiten des zweiten Rechtecks, denn es ist 4 (60. 3) = 48. 15. In der zweiten Auflösung verfährt Planudes folgendermassen: Soll der Flächeninhalt des einen Rechtecks das $n$fache des andern sein, so sind vier Zahlen anzunehmen; ist die erste = x, so ist die zweite $(n + 1)\, x = a$, die dritte $n^2\, x = b$, die vierte $n\,(n + 1)\, x = c$. Diese Werthe genügen der Aufgabe, denn es ist

$$x + c = x + n(n+1)x = x(n^2 + n + 1)$$
$$a + b = (n+1)x + n^2 x = x(n^2 + n + 1)$$
$$xc = n(n+1)x^2$$
$$ab = n^2(n+1)x^2.$$

Die Umfänge der Rechtecke sind demnach gleich, in Betreff des Inhalts ist das eine das $n$fache des andern.

Der folgende griechische Text ist nach zwei Handschriften der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris redigirt. Die eine stammt aus dem 14. Jahrhundert und hat als Aufschrift: *Μαξίμου μοναχοῦ τοῦ πλανούδη ψηφοφορία κατ' ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη*. Sie enthält die Schrift des Planudes nicht vollständig, sie endigt mit der Multiplication. Mit ihr scheinen die Handschriften der S. Marcus-Bibliothek n. 303 und n. 323 übereinzustimmen, da Villoison (Anecdot. graec. Tom. II. p. 153) in Betreff ihres Inhalts nur die Aufschriften: *περὶ συνθέσεως, περὶ ἀφαιρέσεως ἤτοι ἐκβολῆς, περὶ πολλαπλασιασμοῦ*, angiebt. In der andern Pariser Handschrift, die im 15. Jahrhundert geschrieben ist, findet sich die ganze Schrift des Planudes; ihr Titel lautet: *Τοῦ φιλοσοφωτάτου μοναχοῦ καὶ τοῦ μαξίμου τοῦ πλανούδου ψηφοφορία κατ' ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη*. Eine dritte Handschrift der Pariser Bibliothek, ebenfalls aus dem 15. Jahrhundert, hat die Aufschrift: *Ψηφοφορία κατ' ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη· ταύτης ἡ φράσις τοῦ φιλοσοφωτάτου ἐν φιλοσόφοις καὶ τιμιωτάτου ἐν μοναχοῖς καὶ τοῦ μαξίμου τοῦ πλανούδη καὶ τοῦ ῥαβδᾶ νικολάου* *). Sie enthält eine Bearbeitung der Schrift des Planudes; manches ist weggelassen, anderes ist aus einer Schrift des Nicolaus Rhabda hinzugesetzt. — Ausserdem ist das Bruchstück am Ende des Codex Gudianus Diophanti benutzt, worüber die Anmerkungen das Nähere angeben.

Das was im Text durch [ ] eingeschlossen ist, ist vom Herausgeber ergänzt.

*) Von diesem Nicolaus Rhabda aus Smyrna, der auch den Beinamen *Ἀρταβάσδης* führt (Schöll, Geschichte der griechischen Literatur, übers. von Pinder, Bd. III. S. 345) existirt eine gedruckte Schrift über das Rechnen mit Hülfe der Finger: *Ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου*. Vergl. Scheibel, Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniss, 11tes Stück S. 350. In der Pariser Bibliothek ist noch handschriftlich von ihm vorhanden: Epistola Nicolai Smyrnaei Rhabdae ad Theodorum Tschabuchen Clazomenium, über Arithmetik. Am Schluss desselben findet sich eine Sammlung von Beispielen unter dem Titel: *μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν*.

Μαξίμου μοναχοῦ τοῦ Πλανούδη ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη.

Οἱ τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι ἐπεί, ὁ μὲν ἀριθμὸς ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦ δὲ ἀπείρου γνῶσις οὐκ ἔστιν, ἐφεῦρον σχήματά τινα καὶ μέθοδον δι' αὐτῶν, ὡς ἂν τὰ τῶν ἐν χρήσει ἀριθμῶν εὐσυνοπτότερόν τε κατανοῆται καὶ ἀκριβέστερον. εἰσὶ δὲ τὰ σχήματα ἐννέα μόνα, ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα· Ι ϒ ꟽ ϟ ω Ϥ ν Λ 9. τιθέασι δὲ καὶ ἕτερόν τι σχῆμα ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν· ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως ο.

Τούτων τῶν θ̅ σχημάτων ἕκαστον καθ' αὑτὸ μόνον κείμενον ἢ τῶν κατὰ τὴν πρώτην χώραν ἀπὸ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἡμῶν ἀρχομένων τὸ μὲν Ι σημαίνει ἕν, τὸ δὲ ϒ δύο, τὸ δὲ ꟽ τρία, τὸ δὲ ϟ τέσσαρα, τὸ δὲ ω πέντε, τὸ δὲ Ϥ ἕξ, τὸ δὲ ν ἑπτά, τὸ δὲ Λ ὀκτώ, τὸ δὲ 9 ἐννέα· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν χώραν τὸ μὲν Ι δέκα, τὸ δὲ ϒ εἴκοσι, τὸ δὲ ꟽ τριάκοντα, καὶ ἑξῆς· κατὰ δὲ τὴν τρίτην χώραν τὸ μὲν Ι ἑκατόν, τὸ δὲ ϒ διακόσια, τὸ δὲ ꟽ τριακόσια, καὶ ἑξῆς· καὶ κατὰ τὰς λοιπὰς δὲ χώρας ὡσαύτως γίνεται. καὶ ὡς κατὰ μὲν τὴν πρώτην χώραν ὡς μονάδες τὰ σημεῖα λαμβάνονται, ἃ μέχρι τῶν ἐννέα προβαίνουσιν ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενα (καὶ γὰρ καὶ τὰ δύο, καὶ τρία, καὶ τέσσαρα, καὶ μέχρι τῶν ἐννέα, οἱ πάντες μοναδικοὶ ἀριθμοὶ λογίζονται, διὰ τὸ πάντας αὐτοὺς ἐντὸς τῆς δεκάδος κεῖσθαι καὶ μήτε αὐτῆς ἐφικνεῖσθαι μήτε ὑπὲρ αὐτὴν ἐκπίπτειν) ὥς τοίνυν κατὰ μὲν τὴν πρώτην χώραν τὸ τυχὸν ἐν αὐτῇ σημεῖον ὡς μοναδικὸς λαμβάνεται ἀριθμός, τὸ δ' ἐν τῇ δευτέρᾳ δεκαδικός, τουτέστιν ἀπὸ τῶν δέκα μέχρι τῶν ἐννενήκοντα, τὸ δ' ἐν τῇ τρίτῃ ἑκατον-

ταδικός, τουτέστιν ἀπὸ τῶν ἑκατὸν μέχρι τῶν ἐνναχοσίων· οὕτως τὸ κατὰ μὲν τὴν τετάρτην χώραν τῶν χιλιάδων λογίζεται, τὸ δὲ κατὰ τὴν πέμπτην τῶν μυριάδων, τὸ δὲ κατὰ τὴν ἕκτην τῶν δεκαδικῶν μυριάδων, τὸ δὲ κατὰ τὴν ζ̄ τῶν ἑκατονταδικῶν μυριάδων, τὸ δὲ κατὰ τὴν ὀγδόην τῶν χιλιαδικῶν μυριάδων, τὸ δὲ κατὰ τὴν ἐννάτην τῶν μυριαδικῶν μυριάδων· καὶ εἰ προβαίνει καὶ ἐπ᾽ ἐκεῖνα, τὸ μὲν κατὰ τὴν δεκάτην τῶν δεκακιςμυριαδικῶν, τὸ δὲ κατὰ τὴν ἑνδεκάτην τῶν ἑκατοντακιςμυριαδικῶν μυριάδων, τὸ δὲ κατὰ τὴν δωδεκάτην τῶν χιλιοντακισμυριαδικῶν μυριάδων, τὸ δὲ κατὰ τὴν τριςκαιδεκάτην τῶν μυριοντακιςμυριαδικῶν μυριάδων· καὶ εἴ τις ἐπὶ πλεῖον χωρῶν δύναιτο, ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος σαφές γένηται τὸ λεγόμενον, ἐκκείσθωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ ∧|ɯчγν϶ω9γ· εἰσὶν οὖν οἱ τοιοῦτοι δέκα χώρας κατέχοντες· ἀλλὰ ὁ μὲν ἐπὶ τῆς ᾱης χώρας, ὡς εἴρηται ἀπὸ τῆς δεξιᾶς χειρός ἀρχομένων ἡμῶν, ὁ γ δηλοῖ δύο, ὅς ἐστι μοναδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς δευτέρας χώρας ὁ 9 ἐννενήκοντα, ὅς ἐστι δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἤτοι διὰ δεκάδων συνισταμένος μόνων, ὥσπερ ὁ πρὸ αὐτοῦ ὁ δύο μοναδικὸς ὢν διὰ μονάδων μόνων· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς τρίτης χώρας ὁ ω πεντακόσια, ὅς ἐστιν ἑκατονταδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς τετάρτης ὁ ϶ τετρακιςχίλια, ὅς ἐστι χιλιαδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς πέμπτης ὁ ν ἑπτακιςμύρια, ὅς ἐστι μυριαδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς ἕκτης ὁ γ εἰκοσακιςμύρια, ὅς ἐστι δεκακιςμυριαδικός ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς ἑβδόμης ὁ ч ἑξακοσίας μυριάδας, ὅς ἐστιν ἑκατοντακιςμυριαδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς ὀγδόης ὁ ɯ τριςχιλίας μυριάδας, ὅς ἐστι χιλιοντακιςμυριαδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς ἐννάτης ὁ | μυρίας μυριάδας, ὅς ἐστι μυριοντακιςμυριαδικὸς ἀριθμός· ὁ δὲ ἐπὶ τῆς δεκάτης ὁ ∧ ὀγδοηκοντάκις μυρίας μυριάδας, ὅς ἐστι δεκακιςμυριοντακιςμυριαδικὸς ἀριθμός. ἔστι δὲ ὡς εἰπεῖν σύμπας ὁ προτεθεὶς ἀριθμός, ὀγδοηκοντάκις μύριαι μυριάδες καὶ ἔτι μύριαι μυριάδες καὶ τριςχίλιαι ἑξακόσιαι εἴκοσι καὶ ἑπτὰ μυριάδες καὶ τετρακιςχίλια πεντακόσια ἐννενήκοντα δύο.

Ἕνεκεν δὲ πλείονος ἀποδείξεως ῥητέον καὶ οὕτως· ὁ μὲν κατὰ τὴν πρώτην χώραν κείμενος ἀριθμὸς τοσούτων μονάδων ἐστὶν ὅσων αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς δηλοῖ, ὁ δὲ δεύτερος τοσούτων δεκάδων, καὶ ὁ τρίτος τοσούτων ἑκατοντάδων, καὶ ὁ τέταρτος χιλιάδων, καὶ ἑξῆς, ὅσηπερ ἡ ποσότης αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἐστιν.

Ἰστέον δὲ καὶ τοῦτο, ὡς μέχρι τῶν τεσσάρων σημείων πρόεισιν ἀριθμὸς ἀμείβων τὰς οἰκείας ὀνομασίας· εἶτα πάλιν ἐν τῷ πέμπτῳ τὸ τοῦ πρώτου

λαμβάνων ὄνομα, οὐ μέντοι αὐτὸς μόνος, ἀλλὰ σὺν τῷ ἀριθμῷ ὃν εὑρίςκεται ἔχων, πρόεισι μέχρι τοῦ ὀγδόου, ἐν αὐτῷ τὸ τοῦ δου λαμβάνων ὄνομα· καὶ οὕτως ἑξῆς προβαίνει· οἷον ἐπὶ τοῦ προτεθέντος ὑποδείγματος ἄνωθεν τὸ μὲν γ σημαίνει καὶ ὀνομάζεται δύο, τὸ δὲ ϑ ἐννενήκοντα, τὸ ϖ πεντακόσια, τὸ δὲ ϡ τετρακιςχίλια· καὶ ἔστι τὸ μὲν ν ἑπτὰ μυριάδες, ὥςπερ ἐν τῷ πρώτῳ ἐλέγομεν δύο, οὕτως καὶ ἐνταῦθα ἑπτὰ πλὴν μυριαδικῶς, τὸ δὲ γ εἴκοσι μυριάδες, ὥσπερ ἐν τῷ δευτέρῳ ἐννενήκοντα, οὕτως ἐνταῦθα εἴκοσι, δεκαδικοὶ γὰρ καὶ ἄμφω οἱ ἀριθμοί, ὥςπερ καὶ οἱ πρὸ αὐτῶν μοναδικοί, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἡ μέντοι τζίφρα, κατὰ μὲν θἄτερον μέρος ἐπὶ τῷ ἄκρῳ τῶν ἀριθμῶν τῷ πρὸς τὴν ἀριστεράν ἡμῶν χεῖρα οὐδέποτε τίθεται, κατὰ δὲ τὸ μέσον τῶν ἀριθμῶν καὶ θἄτερον μέρος τὸ πρὸς τὴν δεξιάν ἤτοι τὸ μέρος τῶν ἐλαττόνων ἀρ θμῶν, ἐπὶ τῷ ἄκρῳ τίθεται· καὶ τίθεται κατά τε τὸ μέσον καὶ τὸ εἰρημένον ἕτερον μέρος οὐ μία μόνον, ἀλλὰ καὶ δύο καὶ τρεῖς καὶ τέσσαρες, καὶ ἐφ᾽ ὅσον ἂν δέῃ· ὥσπερ δὲ αἱ χῶραι αὐξάνουσι τοὺς ἀριθμοὺς, οὕτω καὶ αἱ τζίφραι ἐπὶ τῶν χωρῶν κείμεναι· οἷον ὡς ἐπὶ ὑποδείγματος μία τζίφρα ἐπὶ τοῦ ἄκρου κειμένη δεκαδικόν ποιεῖ τόν ἀριθμὸν, ϖο πεντήκοντα γοῦν, δύο δὲ ἑκατονταδικόν, ϡοο τετρακόσια γοῦν, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· ἐπὶ δέ τοῦ μέσου εἰ μέν μία κεῖται, πρὸ αὐτῆς καὶ ἓν μόνον σημεῖον, ἑκατονταδικὸν ποιεῖ τὸν ἀριθμόν, μογ τριακόσια δύο γοῦν· εἰ δὲ δύο κεῖνται, χιλιαδικόν, ϥοοϖ ἑξακιςχίλια πέντε γοῦν· εἰ δὲ μία μὲν κεῖται, πρὸ αὐτῆς δὲ δύο, σημαίνει χιλιαδικὸς, ϥοϡμ ἑξακιςχιλία τεσσαράκοντα τρία γοῦν, εἰ δὲ δύο, μυριαδικόν, ϥοοϡμ ἑξακιςμύρια τεσσαράκοντα τρία γοῦν, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· καὶ ἁπλῶς εἰπών κατὰ τὴν τάξιν τῆς χώρας, ἐν ᾗ κεῖται τὸ σημεῖον, λαμβάνεται καὶ ὁ ἀριθμός.

Ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τοίνυν ἕξ τινων δεόμεθα συμβαλλομένων ἡμῖν εἰς τήν ἀστρονομίαν, ὧν τὸ μὲν καλοῦσι σημεῖα ἤτοι σχήματα, τὸ δὲ σύνθεσιν, τὸ δὲ ἀφαίρεσιν, τὸ δὲ πολλαπλασιασμόν, τὸ δὲ μερισμόν, τὸ δὲ ἕκτον εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς παντὸς ἀριθμοῦ ὡς τετραγώνου. καὶ περὶ μὲν τῶν σημείων ἤδη εἴρηται, τὴν δὲ σύνθεσιν μεταχειρήσομεν τοῦτον τὸν τρόπον.

Περὶ συνθέσεως.

Σύνθεσίς ἐστιν ἕνωσις δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν εἰς ἑνός ἀριθμοῦ συγκεφαλαίωσιν, οἷον ὅταν δύο καὶ τρία συντιθέντες πέντε ποιῶμεν· γένεται δὲ

οὕτως. κατάταξον σχήματα ἐφεξῆς ὅσα βούλει καὶ οἷα, καὶ πάλιν κατωτέρω τούτων ἕτερα οἷα βούλει, τὰς ἴσας χώρας ἐπέχοντα ἢ καὶ πλείους ἢ καὶ ἐλάττους· κείσθωσαν δὲ οὕτως, ὥστε τὴν μὲν μοναδικὴν χώραν ὑπὸ τὴν μοναδικὴν κεῖσθαι καὶ τὴν δεκαδικὴν ὑπὸ τὴν ὁμοίαν, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· εἶτα συντίθει ἕκαστον ἑκάστῳ, τουτέστι πρῶτον πρώτῳ, δεύτερον δευτέρῳ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· καὶ τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν ἐξ ἀμφοῖν γράφε ἀνωτέρω τοῦ πρώτου στίχου, τὸν μὲν ἀπὸ τῶν πρώτων συντιθέμενον ἀνωτέρω τοῦ πρώτου, τὸν δὲ ἀπὸ τῶν δευτέρων ἀνωτέρω τοῦ δευτέρου, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· εἰ μὲν οὖν ἐστι τὸ ποσὸν τῶν συντιθεμένων ἀριθμῶν δύο ἢ τρία ἢ τέσσαρα μέχρι καὶ τῶν ἐννέα, γράφεται ὡς εἴρηται ἀνωτέρω, εἰ δὲ δέκα μόνα, γράφε τζίφραν, ἥτις σημαίνει οὐδὲν, καὶ κράτει ἓν ἀντὶ τῶν δέκα, ὅπερ ἓν ἕνου τοῖς μετὰ ταῦτα συντεθησομένοις ἀριθμοῖς· εἰ δὲ ὑπὲρ τὰ δέκα ἐστὶ τὸ ποσόν, γράφε μὲν τὰ ἐπέκεινα τῶν δέκα ἀνωτέρω τῶν συντεθέντων ὡς εἴρηται, κράτει δὲ αὖθις ἀντὶ τῶν δέκα ἓν καὶ ἕνου τοῦτο τοῖς μετὰ ταῦτα συντεθησομένοις.

∧	ο	ϻ	ο	ɣ
ϖ	ϥ	∧	ν	∧
ɣ	ϻ	ϛ	ϻ	ϻ

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὰ γένηται τὰ λεγόμενα, ὑποκείσθω διάγραμμα τόδε. εἰπὲ οὖν ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ ϻ καὶ τοῦ ν, ϻ καὶ ν, ǀο, γράψον ἄνω τζίφραν, κράτει μονάδα ἥτις σημαίνει δέκα· καὶ πάλιν ϛ καὶ ∧, ǀɣ, ἐμβίβασον καὶ ἣν κατέχεις μονάδα καὶ ἰδοὺ ǀϻ, κράτει πάλιν μονάδα ἥτις σημαίνει δέκα καὶ γράψον ἄνω ϻ· καὶ πάλιν ϻ καὶ ϥ, 9, ἐμβίβασον καὶ ἣν κατέχεις μονάδα καὶ ἰδοὺ ǀο, γράψον ἄνω τζίφραν καὶ πάλιν κράτει μονάδα· καὶ αὖθις εἰπὲ ɣ καὶ ϖ, ν, ἐμβίβασον καὶ ἣν κατέχεις μονάδα καὶ ἰδοὺ ∧, γράψον ταῦτα ἄνω· τὰ γοῦν πεντακισχίλια ἑξακόσια ὀγδοήκοντα ἑπτὰ καὶ τὰ δισχίλια τριακόσια τεσσαράκοντα τρία εἰσὶ συνθέμενα ὀκτακισχίλια τριάκοντα. γίνεται δὲ καὶ ἡ δοκιμὴ δι' ἧς μανθάνομεν, εἴτε ἀκριβῶς ἐποιησάμεθα τὴν σύνθεσιν εἴτε μή, τόνδε τὸν τρόπον· λάμβανε τὴν ποσότητα τῶν σχημάτων μηκέτι κατὰ μοναδικὰς καὶ δεκαδικὰς καὶ τὰς τούτων ἐπέκεινα τάξεις, ἀλλὰ κατὰ μοναδικὰς ἀεί, καὶ συντιθεὶς ἕκαστον τῶν στίχων ἰδίᾳ σκόπει τὸν συναγόμενον ἐξ ἑκάστου ἀριθμόν, καὶ ὑφαιρῶν ἕκαστον ἐπὶ τῶν ἐννέα σκόπει πάλιν τί ἑκάστῳ καταλιμπάνεται, καὶ τὸ καταλιμπανόμενον τίθει πρὸ τοῦ στίχου ὅθεν κατελείφθη· καὶ εἰ μὲν τὰ καταλειφθέντα τῶν κάτω δύο στίχων σημεῖα μέχρι καὶ τῶν ἐννέα ἀνίασιν, οὐδὲν δεῖ ὑφαιρεῖν ἐξ αὐτῶν, εἰ δὲ ὑπὲρ ταῦτα συνάγεται, πάλιν ὑφαιρεῖν

τὸν ἐννέα καὶ τὰ λειφθέντα σκοπεῖν· καὶ εἰ μὲν ἴσα τῷ καταλειφθέντι σημείῳ ἀπὸ τοῦ ἐπάνω τρίτου στίχου εἰσὶ, χρὴ γιγνώσκειν ὡς ἀψευδῶς ἡ σύνθεσις προὔβη, εἰ δὲ μὴ ἴσα, τοὐναντίον. σαφηνείας δὲ ἕνεκεν εἰρήσθω καὶ ἐπὶ τοῦ προτεθέντος ὑποδείγματος· λέγομεν οὖν ʌ καὶ ɰ, ||, ὕφελε τὰ ٩ [καὶ] ἐναπελείφθη [ɣ· καὶ εἰπὲ ω καὶ ɥ, ||, ὕφελε τὰ ٩ καὶ ἐναπελείφθη ɣ, καὶ εἰπὲ ɣ καὶ ʌ, |o, ὕφελε τὰ ٩, ἐναπελείφθη] |, καὶ εἰπὲ | καὶ v, ʌ, καὶ γράψον ταῦτα τὰ ʌ ἐφεξῆς τῷ μέσῳ στίχῳ· καὶ πάλιν εἰπὲ ɣ καὶ ɰ, ω, ω, ϟ, ٩, ὕφελε ταῦτα καὶ ἐναπελείφθη ὁ ἑξῆς τούτοις ἀριθμὸς ὁ ɰ, καὶ γράψον τοῦτον ἐφεξῆς τοῖς συντεθεῖσι τούτοις ἀριθμοῖς· καὶ εἰπέ ɰ καὶ ʌ, ||, ὕφελε ٩ καὶ ἐναπελείφθη ɣ· ἔχεις οὖν τὸν ἀριθμὸν ἴσον τῷ τῆς προτέρας δοκιμῆς ἀριθμῷ, καὶ ἔστιν ἡ σύνθεσις ἀψευδής. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς συνθέσεως.

Περὶ ἀφαιρέσεως ἤτοι ἐκβολῆς.

Ἀφαίρεσίς ἐστιν ἀριθμοῦ, ἀριθμὸν ἀφελεῖν ἐξ ἀριθμοῦ καὶ σκοπεῖν τὸν καταλιμπανόμενον τίς ἐστιν. ἀφαιροῦμεν δὲ ἀεὶ ἢ ἐλάττονα ἀπὸ μείζονος καὶ καταλιμπάνεταί τι, οἷον ἀπὸ τῶν πέντε τὰ τρία, καταλιμπάνεται δύο. ἢ ἴσον ἀπὸ ἴσου, καὶ καταλιμπάνεται οὐδέν, οἷον ὅταν τὰ τρία ἀφαιρῶμεν ἀπὸ τῶν τριῶν· μείζονα δὲ ἐξ ἐλάττονος οὐκ ἔστι δυνατὸν ἀφελεῖν, ὃ γάρ μὴ ἔχει τις, οὐδὲ ἀφαιρεθῆναι δύναιτο τοῦτο.

Ποιῶν τοίνυν ἀφαίρεσιν ἀριθμοῦ ἐξ ἀριθμοῦ ποίει ταύτην οὕτως· γράφον ἐφεξῆς σχήματα ὅσα καὶ οἷα βούλει· καὶ πάλιν κατωτέρω τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν σχημάτων, ἢ καὶ ἐλάττονα, οὐ μὴν πλείονα· τὰ γὰρ ἐκβαλλόμενα ἐλάττω δεῖ εἶναι, ἀφ' ὧν ἐκβληθήσεσθαι μέλλουσιν. ἀλλ' εἰ μὲν ἐλάττονα εἰσὶ τά κατωτέρω σχήματα, οὐδὲν δεῖ προσδιορίζεσθαι· εἰ δ' ἴσα εἰσὶ τοῖς ἄνω, ἔστω τὸ τελευταῖον σχῆμα τοῦ ἐπάνω στίχου μεῖζον τοῦ τελευταίου καὶ ὁμοταγοῦς σχήματος τοῦ κατωτέρω στίχου· λέγω δὲ τελευταῖον, ὡς καὶ πρότερον εἴρηται, τὸ πρὸς τὴν ἀριστερὰν ἡμῶν χεῖρα· ἔσται δὲ τὸ σχῆμα τοῦ σχήματος μεῖζον, ἵνα καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅλος ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ μείζων ᾖ. τούτου γὰρ ὄντος, κἂν τὰ λοιπὰ τοῦ κατωτέρω σχήματος πάντα μείζω ᾖ τῶν τοῦ ἀνωτέρω στίχου λοιπῶν σχημάτων, ἕκαστον ἑκάστου, οὐδὲν ἧττον ὁ ἀνωτέρω μείζων ἔσται τοῦ κατωτέρω, τουτέστι τοῦ ἀφαιρουμένου. γραφέντων τοίνυν τῶν στίχων καὶ ὁμοταγῶν κειμένων, τῶν τε μοναδικῶν τοῖς μοναδικοῖς καὶ τῶν δεκαδικῶν τοῖς ὁμοίοις, καὶ ἐφεξῆς, εἰ μὲν τὸ πρῶτον τοῦ κατωτέρω στίχου σημεῖον ἔλαττον εἴη τοῦ πρώτου τοῦ ἀνωτέρω,

ἀφαίρει τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ τὸν καταλειφθέντα ἀριθμὸν γράφε ἐπάνω τοῦ πρώτου σχήματος τοῦ ἀνωτέρω στίχου· εἰ δὲ ἴσον, ἀφαίρει ὅλον ἐξ ὅλου, καὶ τὸ καταλειφθὲν οὐδὲν γράψον ὡς εἴρηται ἐπάνω· εἰ δὲ πλεῖον, ἐπεὶ μὴ δυνατὸν τὸ μεῖζον ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, δάνεισαι τῷ μετ' ἐκείνῳ σχήματι, τουτέστι τῷ δευτέρῳ τοῦ κατωτέρω στίχου, μονάδα ἥτις σημαίνει δέκα, πρὸς γὰρ τὸ ἐπὶ τῆς πρώτης χώρας σχῆμα δεκαδικὸν τὸ δεύτερον ἔχει σχέσιν. καὶ συνθεὶς τὰ δέκα ταῦτα τῷ πρωτῳ τοῦ ἀνωτέρω στίχου ἀριθμῷ τῷ ἐλάττονι, ἀφαίρει τὸν μείζονα ἀπὸ τοῦ συντεθέντος, καὶ τὸν καταλειφθέντα γράψον ἐπάνω τοῦ ἐλάττονος πάλιν. εἰ μὲν δύνῃ ἀφελεῖν τὸ δεύτερον τοῦ κατωτέρω στίχου σχῆμα μετὰ τῆς προστεθείσης αὐτῷ μονάδος, ἡ γὰρ μονὰς αὕτη πρὸς μὲν τὸν ὁμοταγῆ αὐτῇ ἀριθμὸν μονὰς λογίζεται, πρὸς δὲ τὸν πρὸ αὐτῆς ἀεὶ δεκάς, ἐπεὶ καὶ πᾶς ἀριθμὸς πρὸς τὸν πρὸ αὐτοῦ δικαδικὸς λαμβάνεται, οἷον ὁ δέκα πρὸς τὴν μονάδα, ὁ ἑκατὸν πρὸς τὸν δέκα, τὰ χίλια πρὸς τὰ ἑκατὸν, καὶ ἑξῆς· εἰ τοίνυν δύνῃ ἀφελεῖν αὐτὸ τὸ δεύτερον σχῆμα μετὰ τῆς προστεθείσης αὐτῷ μονάδος, ἄφελε τοῦτο καὶ τὸ καταλειφθὲν, εἰ καταλιμπάνεταί τι, γράψον ἐπάνω τοῦ ἀνωτέρω δευτέρου, εἰ δ' οὐδεν, τὸ οὐδέν· εἰ δὲ πάλιν μεῖζόν ἐστι τὸ κατωτέρω δεύτερον σὺν τῇ μονάδι τοῦ ἀνωτέρω δευτέρου, δάνεισαι πάλιν τῷ τρίτῳ τοῦ κατωτέρω μονάδα ἤτοι δέκα, καὶ συνθεὶς τὰ δέκα τῷ δευτέρῳ τοῦ ἀνωτέρω καὶ ἀφελὼν τὸ δεύτερον τοῦ κατωτέρω σὺν τῇ μονάδι, τὰ καταλειφθέντα πάλιν γράψον ἐπάνω τοῦ δευτέρου τοῦ ἀνωτέρω. καὶ οὕτω μέχρι τέλους προβαίνων ἕξεις τὸ ζητούμενον· οἱ γὰρ καταλιμπανόμενοι ἀριθμοὶ καὶ ἐπάνω τοῦ ἀνωτέρω στίχου γραφόμενοι, ἐκεῖνός ἐστιν ὁ ἀριθμός, ὁ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ὅλου τοῦ ἐλάττονος ἐξ ὅλου τοῦ μείζονος καταλιμπανόμενος.

ω	ϡ	ч	I	ч
I	λ	ν	ч	9
ω	ϡ	ч	I	γ
μ	ω	λ	ϡ	μ
I	I	I	I	

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν ἡμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, ῥητέον οὕτως· θέλω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ γ τὸν μ, ἀλλ' οὐ δύναμαι, μείζων γὰρ ὁ μ τοῦ γ· προστίθημι μονάδα τῷ μετὰ τὸν μ τῷ ϡ· ταύτην τὴν μονάδα λαμβάνω ὡς δεκάδα καὶ λέγω Ιο καὶ γ, Ιγ· ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν Ιγ τὰ μ, λοιπὰ 9· ταῦτα γράφω ἐπάνω τοῦ γ. πάλιν ἐθέλω ἀφελεῖν τὸν ϡ μετὰ τῆς μονάδος ἀπὸ τοῦ I, ἀλλ' οὐ δύναμαι· προστίθημι τῷ μετὰ τὸν ϡ τῷ λ μονάδα καὶ λαμβάνω ταύτην ὡς δεκάδα, καὶ λέγω δέκα καὶ I, II. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν II τὸν ϡ μετὰ τῆς μονάδος ἤτοι τὸν ω, λοιπὰ ч· ταῦτα γράφω ἐπάνω τοῦ I. τούτῳ γοῦν τῷ τρόπῳ χρώμενος ἔρχομαι ἐπὶ τὸν τελευ-

ταῖον, καὶ ἐπεὶ δύναμαι ἀφελεῖν τὸν μ μετὰ τῆς μονάδος ἀπὸ τοῦ ω, ἀφαιρῶ ἀπὸ τούτου [τὸν] ϟ, τοῦτο γάρ ἐστι μ καὶ μονάς· λοιπὴ μονάς· ταύτην γράφω ἐπάνω τοῦ ω. καὶ ταῦτα μὲν οὕτως δεικτέον δὲ καὶ ἐπὶ ἑτέρου παραδείγματος, πῶς τὸ καταλιμπανόμενον οὐδὲν, ἡνίκα ἂν καταλιμπάνηται, γράφεται· ἐρχόμενος ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὴν τρίτην χώραν, ἐπεὶ δύναμαι μετὰ τῆς προστεθείσης αὐτῇ μονάδος τουτέστι τὰ δύο ἐξ ὅλων τῶν γ ἀφελεῖν καὶ καταλιμπάνεται οὐδὲν, γράφω τὸ ο ἐπάνω τῶν δύο· τὸ αὐτὸ δὲ ποιῶ καὶ ἐπὶ τοῦ τέλους τοῦ διαγράμματος.

μ	Ι	γ	ω	ч
ο	ν	ο	ʌ	ʌ
μ	Ι	γ	ω	γ
γ	ϟ	Ι	ч	ʌ
Ι	Ι	Ι	Ι	

Ἔτι δεικτέον καὶ ἐπὶ ἑτέρας καταγραφῆς, πῶς ἐλαττόνων ὄντων τούτων κατωτέρω σχημάτων περαίνεται τὸ προκείμενον· ἐρχόμενος ἐπὶ τὴν δ̄ χώραν, ἐπεὶ μὴ δύναμαι τὸν ч μετὰ τῆς προστεθείσης αὐτῇ μονάδος ἤτοι τὰ ν ἀφελεῖν ἀπὸ τῶν ω, γράφω ὑπὸ τὸν ϟ ἐφεξῆς τοῖς μονάσι μονάδα καὶ λαμβάνω ταύτην ὡς δεκάδα, καὶ συντιθεὶς αὐτὴν τῷ ω ποιῶ ὡς ἐδιδάχθην· εἶτα ἀφαιρῶ τὴν μονάδα ἀπὸ τοῦ ϟ, λοιπὰ μ, ταῦτα γράφω ἐπάνω τοῦ ϟ· εἰ δὲ καὶ δύο καὶ τρισὶ καὶ πλείοσι σχήμασιν ἐλάττων εἴη ὁ κατωτέρω στίχος, τῷ ἀνωτέρω ἐν ὅσοις τῶν τοῦ ἀνωτέρω σχημάτων πρὸς τῷ τέλει οὖσιν οὐχ ὑπογράφεται μονάς, οἷον ὁλόκληροι γράφονται ἕκαστος ἐπάνω ἑαυτοῦ ἐφεξῆς τοῖς ἐπάνω γραφομένοις σχήμασι καὶ τοῖς καταλιμπανομένοις συναριθμοῦνται.

ч	ϟ	ω	ϟ	μ	γ
ч	μ	ʌ	ч	ν	ϟ
ч	ϟ	ω	ϟ	μ	γ
		ч	ν	ω	ʌ
		Ι	Ι	Ι	Ι

Ποιῶν δὲ κἀνταῦθα τὴν δοκιμὴν ποίει οὕτως· λέγε ὡς ἐπὶ τοῦ τελευταίου ὑποδείγματος, ʌ καὶ ϟ, Ιγ, ἄφελε τὰ Ιο καὶ κράτει μονάδα ἀντ᾽ αὐτῆς, λοιπὰ δύο· ταῦτα γράψον ἐπάνω τοῦ ϟ· πάλιν ω καὶ ν, Ιγ· πρόσθες καὶ ἣν κατέχεις μονάδα. καὶ ἰδοὺ Ιμ· ἄφελε τά Ιο καὶ πάλιν κράτει μονάδα, λοιπὰ μ· ταῦτα γράψον ἐπάνω τοῦ ν· πάλιν ν καὶ ч, Ιμ· πρόσθες καὶ τὴν μονάδα, γίνονται Ιϟ· ἄφελε τὰ Ιο καὶ πάλιν κράτει μονάδα, λοιπὰ ϟ· ταῦτα γράψον ἐπάνω τοῦ ч· πάλιν ч καὶ ʌ, Ιϟ· πρόσθες καὶ τὴν μονάδα, γίνονται Ιω· ἄφελε τὰ Ιο καὶ πάλιν κράτει μονάδα, λοιπὰ ω· ταῦτα γράψον ἐπάνω τοῦ ʌ. εἶτα ἐπεὶ μηδὲν πλέον ἔχομεν ἐκ τοῦ κατωτέρω τῶν πρώτων δύο στίχων, λάμβανε τὰ ἑξῆς τῶν καταλειφθέντων τουτέστι τὰ μ· καὶ πάλιν προστίθει τούτοις τὴν μονάδα ἣν κατεῖχες καὶ γίνονται ϟ· ταῦτα γράψον ἐπάνω τοῦ μ· εἶτα ἐπεὶ μηδὲ τὰ ч ἔχουσιν ὡς ἂν ἑνωθῶσιν, οὔτε

μονὰς κατέχεται ἥτις προστέθῃ ἂν αὐτῷ, αὐτὰ μόνα τὰ ч τίθει ἐπάνω ἑαυτῶν· καὶ ἀπέβη ὁ ἀνωτάτω πάντων στίχος, ὁ αὐτὸς τῷ ἀνωτέρω τῶν ἐξ ἀρχῆς δύο, καὶ ἀκριβὴς γέγονεν ἡ ἀφαίρεσις. καὶ δὴ τόνδε τὸν τρόπον χρὴ πάντοτε τὴν δοκιμὴν γίνεσθαι, τουτέστι συντιθέναι τῶν δύο πρώτων στίχων τὸν κατωτέρω τῷ τῶν καταλιμπανομένων ἀριθμῶν στίχῳ καὶ τὸν ἀποτελούμενον ἐξ αὐτῶν στίχον σκοπεῖν καὶ εἰ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀνωτέρω τῶν δύο πρώτων, ἀφελῶς ἀποφαίνεσθαι τὴν ἀφαίρεσιν γεγενῆσθαι.

Ἔστι δὲ καὶ ἑτέρα μέθοδος ἀφαιρέσεως γινομένη τόνδε τὸν τρόπον· ἐκτίθημι δύο στίχους ἀριθμῶν ἤτοι ἴσους τὰς χώρας τῶν σχημάτων ἢ ἀνίσους· ἀνίσους δὲ λέγω, ὥστε δηλονότι τὸν ἀνωτέρω πλείους χώρας ἔχειν τοῦ κατωτέρω· ἔστωσαν ἴσοι καὶ ἔστω τελευταῖον σχῆμα τοῦ ἀνωτέρω μεῖζον τοῦ κατωτέρω ὡς προδιορίζεται. εἰ μὲν οὖν ὁ πρῶτος τοῦ κατωτέρω ἤτοι ἴσος ἢ ἐλάττων ἐστὶ τοῦ πρώτου τοῦ ἀνωτέρω, ἀφαιρεῖται ἐξ αὐτοῦ ὡς προεδηλώθη· εἰ δὲ μείζων, δανείζω τοῦ ἀνωτέρω στίχου πρώτῳ σημείῳ τῷ ἐλάττονι μονάδα ἐκ τοῦ μετ' αὐτὸν δευτέρου, ἥτις εἰς τὸν πρῶτον τόπον ἐρχομένη γίνεται δεκάς, καὶ γίνεται τὸ δεύτερον σημεῖον μονάδι ἔλαττον ἑαυτοῦ, ἐξεβλήθη γὰρ ἐξ αὐτοῦ μονάς, οἷον εἰ ϛ ἦν, γίνεται ɰ· καὶ γράφω τὸ ɰ ἐπάνω τοῦ ϛ· καὶ συντίθημι τὴν δεκάδα καὶ τὸν ἐλάττονα ἀριθμὸν, καὶ ἀφαιρῶ ἐκ τοῦ συντεθέντος τὸν μείζονα, καὶ τὸν λοιπὸν γράφω ἐπάνω τοῦ ἐλάττονος πάλιν· εἰ μὲν δύναμαι ἀφελεῖν τὸν δεύτερον κατωτέρω ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ἀνωτέρω, οὐκέτι τυχὸν ἀπὸ τοῦ ϛ ἀλλ' ἀπὸ τοῦ ɰ ἀφαιρῶ· εἰ δὲ μή, δανείζω πάλιν ἀπὸ τοῦ τρίτου τῷ δευτέρῳ μονάδα, καὶ προίημι καθὼς προείρηται· εἰ δὲ ὅλον τὸ κατωτέρω σχῆμα ἐξ ὅλου τοῦ ἀνωτέρω ἀφαιρεῖται, γράφω ἐπάνω τοῦ ἀνωτέρω οὐδὲν.

Γενέσθω δὲ τὸ λεγόμενον καὶ ἐπὶ καταγραφῆς δῆλον. λέγω τοίνυν οὕτως·

ο	∧	9	∧	ϛ
γ	ϛ	ο	ɰ	Ι
ɰ	ϖ	Ι	ϛ	γ
γ	ч	Ι	ϖ	∧

θέλω ἀφελεῖν ἀπὸ τῶν γ τὰ ∧, ἀλλ' οὐ δυνατὸν· δανείζω τῷ γ μονάδα ἀπὸ τῶν ϛ καὶ τὰ μὲν ϛ γέγονε ɰ α̈ καὶ γράφω ἐπάνω τοῦ ϛ, τὴν δὲ μονάδα ἤτοι τὰ δέκα συντίθημι τοῖς δυσὶ καὶ γίνεται Ιγ· ἀφαιρῶ ἐκ τούτων τὰ ∧, λοιπὰ ϛ, α̈ καὶ γράφω ἐπάνω τῶν γ· πάλιν θέλω ἀφελεῖν τὰ ϖ οὐκ ἔτι ἀπὸ τῶν ϛ, ἀλλὰ ἀπὸ τῶν ɰ, καὶ οὐ δύναμαι· δανείζω τῷ ɰ τὴν τῆς τρίτης χώρας μονάδα καὶ ἀπὸ μὲν τῆς μονάδος κατελείφθη οὐδὲν· ο̈ καὶ γράφω ἐπάνω τῆς μονάδος, τὴν δὲ μονάδα συνθεὶς τῷ ɰ ποιῶ Ιɰ καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ τούτων τὰ ɰ, λοιπὰ ν· α̈ καὶ γράφω ἐπάνω τῶν ɰ. ὁμοίως βούλομαι ἀφελεῖν τὸ Ι ἀπὸ τοῦ ο, καὶ οὐ δυνατὸν· δανείζω πάλιν τῷ ο μο-

νάδα ἀπο τοῦ ω, καὶ ποιῶ τὸ προκείμενον. ἐὰν δὲ ὁ ἀνωτέρω στίχος ἔχῃ

ο	ч	ν	ʌ	ʌ
γ	9	Ι	ɯ	
ɯ	ο	γ	ϟ	ч
γ	ɯ	ϟ	ω	ʌ

τζίφρας διὰ μέσου τοῦ στίχου εἴτε μίαν εἴτε δύο, πάλιν δανείσματι χρῶμαι, καὶ εἰ μὲν μία ἐστὶν ἡ τζίφρα, ποιῶ οὕτως ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου διαγράμματος· ἐρχόμενος ἐπὶ τὴν τρίτην χώραν, ἐπεὶ μὴ δύναμαι ἀφελεῖν τὴν ϟ ἀπὸ τοῦ Ι, ἐθέλω δανείσαι ἀπὸ τῆς $\bar{δ}$ χώρας τῷ Ι μονάδα, ἀλλ' ἐν τῇ τετάρτῃ εὑρίσκω οὐδέν· πορεύομαι γοῦν ἐπὶ τὴν πέμπτην καὶ λαμβάνω μονάδα, ἥτις ἐπὶ τὴν $\bar{δ}$ ἐρχομένη χώραν γίνεται δέκα· ἀλλ' ἐπεὶ οὐδέποτε οἱ ἀριθμοὶ τουτέστι τὰ σχήματα ὑπερβαίνουσι τὸν ἐννέα, λαμβάνω πάλιν ἀπὸ τῶν δέκα μονάδα καὶ δανείζω ταύτην τῇ ἐν τῇ τρίτῃ χώρᾳ μονάδι καὶ γίνεται ΙΙ καὶ οὕτω προβαίνει ἡ ἀφαίρεσις. καὶ οὕτω μὲν εἰ μία κεῖται

ο	ч	ν	ν	9
γ	9	9	Ι	
ɯ	ο	ο	γ	ϟ
γ	ɯ	γ	ϟ	ω

τζίφρα· εἰ δὲ δύο, ποιῶ οὕτως ὡς ἐπὶ τῆς ἑτέρας καταγραφῆς· ἐρχόμενος ἐπὶ τὴν δευτέραν χώραν ἐπεὶ μὴ δύναμαι ἀφελεῖν τὸν ϟ ἀπὸ τοῦ Ι, ἐθέλω δανείσαι ἀπὸ τῆς τρίτης χώρας τῷ Ι μονάδα, ἀλλ' ἐν τῇ τρίτῃ χώρᾳ εὑρίσκω οὐδέν· πορεύομαι γοῦν ἐπὶ τὴν τετάρτην, εὑρίσκω καὶ ἐν ἐκείνῃ οὐδέν· ἄνειμι ἐπὶ τὴν πέμπτην καὶ λαμβάνω ἐξ αὐτῆς μονάδα ἥτις ἐπὶ τὴν τετάρτην ἐρχομένη χώραν γίνεται δέκα· καὶ ἀπολειφθέντων ἐν τῇ τετάρτῃ χώρᾳ ἐννέα, πάλιν λαμβάνω ἀπὸ τῶν δέκα τῶν ἐπὶ τῆς τρίτης χώρας μονάδα καὶ δανείζω ταύτην τῷ ἐπὶ τῆς δευτέρας χώρας Ι· καὶ ἐναπολειφθέντων ἐπὶ τῆς τρίτης χώρας ἐννέα, ποιῶ κατὰ τὴν προυποτεθεῖσαν διδασκαλίαν τὴν ἀφαίρεσιν. ἡ δὲ δοκιμὴ καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου γίνεται καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς προτέρας.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Πολλαπλασιασμός ἐστιν, ὅταν ἀριθμὸς ἀριθμὸν μετριῶν τοσαυτάκις ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ μετροῦντι, ἐκ τῶν μετρήσεων ἕτερον ἀριθμὸν ποιῇ, οἷον δὶς τὰ τρία ἕξ, ὅσαι γάρ μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ δύο, τοσαυτάκις ὁ τρία ληφθεὶς, ἢ καὶ τὸ ἔμπαλιν, τὸν ἕξ ἀπετέλεσε. γίνεται δὲ ἡ μέθοδος τούτου τοιάδε· ἔκθου ἀριθμῶν σχήματα ὅσα καὶ οἷα βούλει, καὶ ὑπ' αὐτὰ ἕτερον στίχον εἴτε τῶν ἴσων σχημάτων εἴτε πλειόνων εἴτε ἐλαττόνων, εὐτάκτως μέντοι πάλιν ὥστε τὸν μοναδικὸν ὑπὸ τὸν μοναδικὸν κεῖσθαι, καὶ τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ τὸν ὅμοιον, καὶ ἑξῆς· εἶτα πολλαπλασίαζε τὸν πρῶτον τοῦ ἀνωτέρω



·άδα άπο τοῦ ω, καὶ ποιῶ τὸ προκείμενον. ἐὰν δὲ ὁ ἀνωτέρω στίχος ἔχῃ τζίφρας διὰ μέσου τοῦ στίχου εἴτε μίαν εἴτε δύο, πάλιν δανείσματι χρῶμαι, καὶ εἰ μὲν μία ἐστὶν ἡ τζίφρα, ποιῶ οὕτως ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου διαγράμματος· ἐρχόμενος ἐπὶ τὴν τρίτην χώραν, ἐπεὶ μὴ δύναμαι ἀφελεῖν τὴν ϛ ἀπὸ τοῦ Ι, ἐθέλω δανείσαι ἀπὸ τῆς δ̄ χώρας τῷ Ι μονάδα,

ο ч ν ʌ ʌ
γ 9 Ι ɰ
ɰ ο γ ϛ ч
γ ɰ ϛ ω ʌ

ἀλλ' ἐν τῇ τετάρτῃ εὑρίσκω οὐδέν· πορεύομαι γοῦν ἐπὶ τὴν πέμπτην καὶ λαμβάνω μονάδα, ἥτις ἐπὶ τὴν δ̄ ἐρχομένη χώραν γίνεται δέκα· ἀλλ' ἐπεὶ οὐδέποτε οἱ ἀριθμοὶ τουτέστι τὰ σχήματα ὑπερβαίνουσι τὸν ἐννέα, λαμβάνω πάλιν ἀπὸ τῶν δέκα μονάδα καὶ δανείζω ταύτην τῇ ἐν τῇ τρίτῃ χώρᾳ μονάδι καὶ γίνεται ΙΙ καὶ οὕτω προβαίνει ἡ ἀφαίρεσις. καὶ οὕτω μὲν εἰ μία κεῖται τζίφρα· εἰ δὲ δύο, ποιῶ οὕτως ὡς ἐπὶ τῆς ἑτέρας καταγραφῆς· ἐρχόμενος ἐπὶ τὴν δευτέραν χώραν ἐπεὶ μὴ δύναμαι ἀφελεῖν τὸν ϛ ἀπὸ τοῦ Ι, ἐθέλω δανείσαι ἀπὸ τῆς τρίτης χώρας τῷ Ι μονάδα, ἀλλ' ἐν τῇ τρίτῃ χώρᾳ εὑρίσκω οὐδέν· πορεύομαι γοῦν ἐπὶ τὴν τετάρτην, εὑρίσκω καὶ ἐν ἐκείνῃ

ο ч ν ν 9
γ 9 9 Ι
ɰ ο ο γ ϛ
γ ɰ γ ϛ ω

οὐδέν· ἄνειμι ἐπὶ τὴν πέμπτην καὶ λαμβάνω ἐξ αὐτῆς μονάδα ἥτις ἐπὶ τὴν τετάρτην ἐρχομένη χώραν γίνεται δέκα· καὶ ἀπολειφθέντων ἐν τῇ τετάρτῃ χώρᾳ ἐννέα, πάλιν λαμβάνω ἀπὸ τῶν δέκα τῶν ἐπὶ τῆς τρίτης χώρας μονάδα καὶ δανείζω ταύτην τῷ ἐπὶ τῆς δευτέρας χώρας Ι· καὶ ἐναπολειφθέντων ἐπὶ τῆς τρίτης χώρας ἐννέα, ποιῶ κατὰ τὴν προυποτεθεῖσαν διδασκαλίαν τὴν ἀφαίρεσιν. ἡ δὲ δοκιμὴ καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου γίνεται καθὼς καὶ ἐπὶ τῆς προτέρας.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Πολλαπλασιασμός ἐστιν, ὅταν ἀριθμὸς ἀριθμὸν μετρῶν τοσαυτάκις ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν [illegible] μετροῦντι, ἐκ τῶν μετρήσεων ἕτερον ἀριθμὸν ποιῇ, οἷον δὶς τὰ τρία ἕξ [illegible]άρ μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ δύο, τοσαυτάκις ὁ τρία ληφθείς, ἢ καὶ τ[illegible] τὸν ἕξ ἀπετέλεσε. γίνεται δὲ ἡ μέθοδος τούτου [illegible]δε· ἔχθου ἀ[illegible] [illegible]ήματα ὅσα καὶ οἷα βούλει, καὶ ὑπ' αὐτὰ ἕτερον [illegible]ν εἴτε τ[illegible] [illegible]άτων εἴτε πλειόνων εἴτε ἐλαττόνων, εὐτάκτως μέν[illegible] [illegible]τάλιν ὥ[illegible] [illegible]ιδικὸν ὑπὸ τὸν μοναδικὸν κεῖσθαι, καὶ τὸν δεκαδικὸν [illegible]ιὸν ὅ[illegible] [illegible] ἐξῆς· εἶτα [illegible]πλασίαζε τὸν πρῶτον τοῦ ἀνωτέρω

στίχου μετὰ τοῦ πρώτου τοῦ κατωτέρω στίχου, καὶ εἰ μὲν μοναδικὸς γίνεται ὁ ἀριθμός, γράψον αὐτὸν ἐπάνω τοῦ πρώτου, εἰ δὲ δεκαδικὸς οἷον δέκα ἢ εἴκοσιν ἢ τριάκοντα καὶ ἑξῆς, γράψον οὐδὲν καὶ κράτει τοσαύτας μονάδας ὅσαι δεκάδες ἦσαν ἐν τῷ ἀριθμῷ, εἰ δὲ μεμιγμένος ἐξ ἀμφοῖν τουτέστι μοναδικοῦ καὶ δεκαδικοῦ οἷον δέκα πέντε ἢ εἴκοσι τέσσαρα καὶ τὰ τοιαῦτα, τὸν μὲν μοναδικὸν τουτέστι τὰ πέντε ἢ τὰ τέσσαρα τυχόν, γράφε ἐπάνω· ὑπὲρ δὲ τοῦ δεκαδικοῦ κράτει τοσαύτας μονάδας ὅσων δεκάδων ἦν ὁ δεκαδικός· εἶτα πολλαπλασίαζε τὸν πρῶτον τοῦ ἀνωτέρω στίχου μετὰ τοῦ δευτέρου τοῦ κατωτέρω, καὶ αὖθις τὸν πρῶτον τοῦ κατωτέρω μετὰ τοῦ δευτέρου τοῦ ἀνωτέρω, καὶ τὸν συναγόμενον ἐκ τούτων δύο πολλαπλασιασμῶν, προστιθεμένων καὶ τῶν μονάδων ὧν κατέχεις εἴτε μία εἴτε δύο εἴτε πλείους, πάλιν εἰ μὲν ὅλος μοναδικὸς γίνεται, γράφε αὐτὸν ἐπάνω τοῦ δευτέρου, εἰ δὲ δεκαδικὸς, εἰ μικτὸς, ποίει ὡς προδεδήλωται. εἰ μὲν οὖν ἀνὰ δύο σχήματα ἔχουσιν οἱ στίχοι, λείπεται ἑξῆς τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιῆσαι, καὶ τὸν συναγόμενον, προστιθεμένων καὶ τῶν κατεχομένων μονάδων εἰ κατέχονταί τινες, ἐφεξῆς τοῖς ἐπάνω γραφομένοις γράφε. εἰ δὲ ἀνὰ τρία σχήματα ἔχουσιν, ἔτι πολλαπλασίασον τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ αὖθις τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν τρίτον κατὰ χιασμόν, καὶ ἔτι τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ τὸν συναγόμενον γράφε ὡς ἐδιδάχθης· εἶτα τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ αὖθις τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ γράφε· εἶτα τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ πάλιν γράφε. ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ παραδείγματος σαφὲς ἡμῖν γένηται τὸ λεγόμενον, ἔστω πρότερον διάγραμμα ἀνὰ δύο

ʌ	ϛ	ο
	ν	ϛ
	μ	ω

σημεῖα ἔχον κατὰ ἄμφω τοὺς στίχους· λέγω γοῦν τετράκις τὰ πέντε, εἴκοσι· γράφω ἐπάνω τῶν ϛ οὐδὲν διὰ τὸ δεκαδικὸν εἶναι τὸν εἴκοσι, κατέχω δύο· καὶ λέγω τετράκις τὰ τρία, δώδεκα, καὶ πεντάκις τὰ δύο, δέκα, ὁμοῦ εἴκοσι δύο· τούτοις προστίθημι τὰς δύο μονάδας ἃς κατεῖχον, γίνονται κδ· γράφω καὶ τὰ ϛ ἐπάνω τοῦ ν, κατέχω καὶ μονάδας δύο· καὶ πάλιν λέγω δὶς τὰ τρία, ἕξ· τούτοις προστίθημι καὶ τὰς δύο μονάδας καὶ γίνονται ὀκτώ· ταῦτα τὰ ʌ γράφω ἐφεξῆς τοῖς ἐπάνω γραφομένοις σημείοις, καὶ γίνεται εἴκοσι τέσσαρα ἐπὶ τὸν τριάκοντα πέντε πολλαπλασιαζόμενος. κείσθω καὶ ἕτερον

||	ϛ	ο	ϛ	ʌ
			ϛ	μ	ν
			ν	ϥ	ϛ

διάγραμμα οὗ οἱ στίχοι ἀνὰ τρία σημεῖα ἔχουσι· λέγω γοῦν δὶς τὰ ϛ, ὀκτώ· ταῦτα γράφω ἐπάνω τοῦ ν· δὶς τὰ ϥ, Ιν, [καὶ τετράκις τὰ μ, Ιν], ὁμοῦ νϛ· γράφω τὰ ϛ ἐπάνω τοῦ μ, κατέχω καὶ ν· πάλιν δὶς τὰ ν, ϛ, τετράκις τὰ ϛ, Ιϥ,

τρὶς τὰ ϥ, Iʌ, ὁμοῦ μʌ· τούτοις προστίθημι καὶ τὰς δύο μονάδας, ὁμοῦ ʒο· γράφω ἐπάνω τοῦ ʒ οὐδὲν καὶ κατέχω ʒ· πάλιν λέγω τρὶς τὰ γ, ϥ, ἑξάκις τὰ ʒ, γʒ, ὁμοῦ μο· προστίθημι καὶ τὰ ʒ, γίνονται μʒ· γράφω ἐφεξῆς τῷ οὐδενὶ τὰ ʒ καὶ κατέχω μ· πάλιν λέγω τετράκις τὰ γ, ʌ, προστίθημι τὰ μ, γίνονται II, καὶ γράφω αὐτὰ ἐφεξῆς τῷ ʒ. εἰ μὲν οὖν τῶν ἴσων σημείων ἐστὶ τῶν στίχων ἑκάτερος, οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς πρόεισιν, εἰ δὲ ὁ ἕτερος τούτων ὑπερβαίνει, ἐκπληρούσθω ὁ ἐλάττων διὰ σημείων τῶν σημαινόντων

v	ϥ	ʌ	ʒ	γ
	I	ʒ	γ	μ
	ο	ο	ω	ʒ

τὸ οὐδὲν, καὶ γινέσθω πάλιν ἡ μέθοδος ὃν τρόπον εἴρηται. ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος δῆλον ᾖ, λέγομεν ὧδε· τρὶς τὰ ʒ, Iγ· γράφω ἐπάνω τῶν μ τὰ γ, κατέχω καὶ I· πάλιν τρὶς τὰ ω, Iω, καὶ τετράκις τὰ γ, ʌ, ὁμοῦ γμ· συντίθημι καὶ τὴν μονάδα, ὁμοῦ γʒ· γράφω ἐπάνω τοῦ γ τὰ ʒ, κατέχω τὰ γ· πάλιν τρίς τὸ οὐδὲν, οὐδὲν, τετράκις τὰ ʒ, Iϥ, δὶς τὰ ω, Iο, ὁμοῦ γϥ· προστίθημι καὶ τὰ γ, ὁμοῦ γʌ· γράφω τὰ ʌ ἐπάνω τοῦ ʒ, κατέχω καὶ γ· πάλιν τρὶς τὸ οὐδέν, οὐδὲν, τετράκις τὸ I, ʒ, δὶς τὸ οὐδὲν, οὐδὲν, πεντάκις τὰ ʒ, γο, ὁμοῦ γʒ· προστίθημι καὶ τὰ γ, ὁμοῦ γϥ· γράφω τὰ ϥ ἐπάνω τοῦ I, κατέχω καὶ γ· πάλιν δὶς τὸ οὐδὲν, οὐδὲν, πεντάκις τὸ I, ω, τετράκις τὸ ο, ο, ὁμοῦ ω· προστίθημι τὰ γ, ὁμοῦ v· ταῦτα γράφω ἐφεξῆς τοῖς ϥ· πάλιν τετράκις τὸ ο, ο, οὐδάπαξ τὸ I, οὐδέν· καὶ οὐ γράφω τι· πάλιν ἅπαξ τὸ ο, ο, καὶ οὐδὲ πάλιν γράφω τι.

Ἰστέον μέντοι καὶ τοῦτο, ὡς ἡνίκα ἂν ἔλθῃς ποιῆσαι τὸν ἐπὶ τῆς πρώτης χώρας ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἐπὶ τῆς ἐσχάτης, μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τούτων ποιεῖν δεῖ σημεῖόν τι ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος, ἵνα μηκέτι πολλαπλασιάζῃς αὐτό, ἀλλ' ᾖ δῆλον, ὅτι ἐπὶ πάντας τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμοὺς ἐπολλαπλασιάσθη·

Γίνεται δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς ὡς ἐν κεφαλαίῳ εἰπεῖν, ἐπὶ μείζονος παραδείγματος δεικνύντες τὸ προκείμενον οὕτως· πολλαπλασίαζε τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ γράφε· εἶτα τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ ἔτι τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον χιαστῶς καὶ γράφε. εἶτα τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν τρίτον χιαστῶς καὶ ἔτι τὸν βον ἐπὶ τὸν βον πρὸς ὀρθὰς καὶ γράφε· εἶτα τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δον καὶ ἔτι τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸν βον ἐπὶ τὸν γον χιαστῶς καὶ γράφε· εἶτα τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν πέμπτον καὶ αον ἐπὶ τὸν εον καὶ πάλιν τὸν βον ἐπὶ τὸν δον καὶ τὸν

βον ἐπὶ τὸν δον χιαστῶς καὶ ἔτι τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν τρίτον πρὸς ὀρθὰς καὶ γράφε· εἶτα ποίει σημεῖόν τι ἐπὶ τὸν πρῶτον ὡς εἴρηται. καὶ ποίει τὸν βον ἐπὶ τὸν εον, ἐπὶ γὰρ τὸν γον καὶ τὸν δον ἐπολλαπλασιάσθη, καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν εον καὶ ἔτι τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν δον καὶ τὸν γον ἐπὶ τὸν δον καὶ γράφε· εἶτα ποίει σημεῖόν τι ἐπὶ τὸν βον. καὶ ποίει τὸν γον ἐπὶ τὸν εον καὶ τὸν γον ἐπὶ τὸν εον, ἐπὶ γὰρ τὸν δον ἐγένετο, καὶ ἔτι τὸν δον ἐπὶ τὸν δον πρὸς ὀρθὰς καὶ γράφε. εἶτα σημειωσάμενος καὶ τὸν γον ποίει τὸν δον ἐπὶ τὸν εον καὶ τὸν δον ἐπὶ τὸν εον καὶ γράφε. εἶτα τὸν εον ἐπὶ τὸν εον καὶ γράφε, ἀεὶ μὲν γὰρ ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν πρῶτον καταρχὰς πολλαπλασιάζεται· εἶτα δὲ ἐπὶ τὸν δεύτερον, ἀλλ' ἐπεὶ μέσον τοῦ αου καὶ βου οὐδέν ἐστιν, οὐ πρόεισι περαιτέρω· εἶτα ὁ πρῶτος πάλιν ἐπὶ τὸν τρίτον, ἐπεὶ δὲ μέσον τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶν ὁ δεύτερος, πολλαπλασιάζεται ὁ δεύτερος ἐφ' ἑαυτόν· εἶτα ἐπὶ τὸν δον, καὶ ἐπὶ μέσον τοῦ δου καὶ αου εἰσιν ὅ τε βος καὶ ὁ γος, πολλαπλασιάζεται ὁ δεύτερος ἐπὶ τὸν γον. εἶτα ἐπὶ τὸν εον, καὶ ἐπεὶ μέσον τοῦ αου καὶ εου εἰσὶν ὅ τε βος καὶ ὁ γος καὶ ὁ δος, πολλαπλασιάζεται μὲν πρῶτον ὁ ἄκρος πρὸς τὸν ἄκρον τουτέστιν ὁ βος πρὸς τὸν δον, εἶτα ὁ μέσος ἤτοι ὁ τρίτος πρὸς ἑαυτόν· ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐπὶ ἕκτου ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ, ἔσονται μέσον τοῦ αου καὶ τοῦ ἕκτο ὁ δεύτερος καὶ γος καὶ δος καὶ εος ὧν πρῶτον μὲν οἱ δύο ἄκροι πολλαπλασιασθήσονται πρὸς ἀλλήλους τουτέστιν ὁ δεύτερος καὶ ὁ πέμπτος, εἶτα ὁ δύο μέσοι ἤτοι ὁ τρίτος καὶ τέταρτος, ἑκάτερα τῶν συζυγιῶν χιαστῶς· καὶ ἐφ' ὅσον ἂν προβαίνῃ τις, τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εὑρήσει. ἐπειδὰν δὲ ὁ πρῶτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ πάντας, τηνικαῦτα ὅτε δεύτερος καὶ ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος καὶ οἱ λοιποὶ ἅπαξ ἕκαστος πολλαπλασιάζεται πρὸς τὸν τελευταῖον, πρὸς τῷ καὶ [τοῖς] διὰ μέσου αὐτῶν πολλαπλασιάζεται καθ' ὃν εἴρηται τρόπον· εἶτα ὁ τελευταῖος πρὸς ἑαυτὸν, καὶ οὕτω τὸ πᾶν ἀπαρτίζεται.

Προσθεωρητέον δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐπειδὰν ὁ πρῶτος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αον, ἁπλὸς γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς, ὁ γὰρ πρῶτος πρὸς μόνον τὸν αον γίνεται· ἐπειδὰν δὲ πρὸς τὸν δεύτερον, διπλοῦς, ὅ τε γὰρ αος ἐπὶ τὸν βον καὶ ὁ αος αὖθις ἐπὶ τὸν δεύτερον· ἐπειδὰν δὲ ἐπὶ τὸν τρίτον, τριπλοῦς, ὅ τε γὰρ αος ἐπὶ τὸν γον καὶ ὁ αος ἐπὶ τὸν γον, καὶ ἔτι ὁ δεύτερος ἐφ' ἑαυτὸν· καὶ ἑξῆς ὁμοίως· καὶ ἁπλῶς ἐφ' οἵαν ἂν ὁ πρῶτος πολλαπλασιάζηται χώραν, τοσαπλοῦς γίνεται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς, ὅση ἐστὶ καὶ ἡ χώρα, οἷον ἡ μὲν αη ἁπλοῦς, ἡ δὲ δευτέρα διπλοῦς, ἡ δὲ τρίτη τριπλοῦς,

καὶ ἑξῆς, παρωνυμεῖ γὰρ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῇ χώρᾳ. ἐπειδὰν δὲ μηκέτι ἐπὶ τοῦ πρώτου ἀλλ᾽ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἢ τρίτου καὶ ἑξῆς πρὸς τὸν ἀεὶ τελευταῖον ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται, πρὸς γὰρ τὸν τελευταῖον ἀεὶ γίνεται καθὸ διελάβομεν ἀνωτέρω, τηνικαῦτα τοσαπλοῦς ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται ὅσαι χῶραι εἰσὶν ἀπὸ δευτέρου τυχὸν καὶ αὐτοῦ τοῦ δευτέρου ἢ τρίτου καὶ αὐτοῦ τοῦ γου ἤ τινος ἄλλου μέχρι τοῦ τελευταίου καὶ αὐτοῦ, παρωνυμεῖ γὰρ κἀνταῦθα ὁ πολλαπλασιασμὸς οὐχὶ τῇ χώρᾳ ὥσπερ ὅτε ἀπὸ τοῦ αου ἐγίνετο, ἀλλὰ ταῖς χώραις. ἔστι δὲ καὶ ἄλλο τι γλαφυρώτερον καὶ φυσικώτερον ἐνταῦθα σκέψασθαι· ὅσαι γὰρ αἱ χῶραι θατέρου τῶν στίχων ἢν ἴσαι ὦσιν, ἢ τοῦ μείζονος ἢν ἄνισοι ὦσιν, ἐπὶ τοσοῦτον ὁ πολλαπλασιασμὸς πρόεισιν ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ κατὰ μονάδα προκόπτων· εἶτα πάλιν κατὰ μονάδα μειούμενος μέχρις ἂν εἰς μονάδα καταντήσας ἐκεῖ στῇ. γινέσθω δὲ καὶ ἐπὶ παραδείγματος δῆλον· ἔστω ἑκάτερος τῶν στίχων ἢ ὁ μείζων χωρῶν τριῶν· ὁ πρῶτος πρὸς τὸν πρῶτον ἁπλοῦν ποιεῖ τὸν πολλαπλασιασμόν· ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν βον καὶ αὖθις ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν δεύτερον διπλοῦν· ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν τρίτον [καὶ αὖθις ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν τρίτον] καὶ ἔτι ὁ δεύτερος ἐφ᾽ ἑαυτὸν τριπλοῦν· ὁ βος ἐπὶ τὸν γον καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ τὸν τρίτον διπλοῦν· ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν τρίτον ἁπλοῦν· ὅρα τοίνυν, ἐξ ἁπλοῦ εἰς διπλοῦν, εἶτα εἰς τριπλοῦν ἐχώρησεν, εἶτα καθ᾽ ὑποβιβασμὸν μοναδικὸν ἐκ τριπλοῦ εἰς διπλοῦν, εἶτα εἰς ἁπλοῦν.

Γίνεται καὶ ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τόνδε τὸν τρόπον· λάμβανε τὰ τῶν προεκτεθειμένων δύο στίχων σχήματα καὶ ἰδίᾳ ἑκατέρου συντίθει αὐτὰ, πάντων κατὰ μοναδικὰς τάξεις λαμβανομένων ὥσπερ ἐκ τῆς δοκιμῆς τῆς συνθέσεως ἐποίεις· καὶ ὑφαίρει τὸν συναχθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ τῶν ἐννέα, καὶ τὰ καταλιμπανόμενα ἐξ ἑκάστου στίχου γράφε ἰδίως· εἶτα πολλαπλασίασον ταῦτα πρός ἀλλήλους, καὶ εἰ μὲν ἐντὸς τῶν 9, γράφε αὐτὸν, εἰ δὲ ὑπὲρ αὐτὰ, ὑφαιρῶν πάλιν αὐτὸν ἐπὶ τῶν θ κράτει τὸν καταλειφθέντα· ποίει δὲ τὸ ὅμοιον καὶ τοῦ γεγονότος τρίτου στίχου ἐκ τοῦ τῶν δύο τῶν προτέρων πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὸ καταλειφθὲν ὁμοίως· εἰ μὲν ἐντὸς τῶν 9, σκόπει τὸ καταλειφθὲν καὶ ἐξ αὐτοῦ κἂν ἴσον ᾖ τῷ ἐκ τῶν δύο τῶν προτέρων στίχων ἀποβάντι λέγε ὀρθῶς πεποιηκέναι τὸν πολλαπλασιασμόν. ἔστω δὲ ὑπόδειγμα τὸ ὑποκείμενον· ὁ συναγόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στίχος συνάγεται μοναδικῶς λαμβανομένων τῶν σχημάτων μϛ· τούτων ὑφαιρουμένων ἐπὶ τῶν 9 καταλιμ-

ϻ ϑ ϛ ʌ ϛ ϑ	ϑ
ϖ ϛ ϻ	ϻ
ϖ ϛ ϻ	ϻ

πάνεται 9· οἱ λοιποὶ δύο στίχοι συνάγονται ἀνὰ |ϻ· ἀφαιρουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τοῦ 9, λοιπὰ ἐν ἑκατέρῳ τρία· τὰ τρία ἐπὶ τὰ τρία γίνονται 9.

Οὐ εριττὸν δὲ ἴσως καὶ ἑτέραν μέθοδον ἐκθέσθαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλ' αὕτη ἐπὶ μὲν χάρτου διὰ μέλανος γενέσθαι πάνυ δυσχερέστατον, ἐν ἄμμῳ δ' ἐπὶ πίνακος καταπαττομένῃ γίνεσθαι πεφυκυῖα διὰ τὸ δεῖν εἶναι τοὺς μὲν τῶν ἀριθμῶν ἐξαλείφειν, ἑτέρους δ' ἀντ' αὐτῶν ἐπὶ τοῦ τόπου ἐκείνων γράφειν, ὅπερ ἐν τῷ μέλανι πλείστην καὶ ἀδιάκριτον τὴν σύγχυσιν ἐμποιεῖ· ἐν ἄμμῳ δὲ ῥάδιον τοὺς μὲν ἐξαλείφειν τῷ δακτύλῳ, ἑτέρους δὲ τῶν ἀριθμῶν ἀντ' αὐτῶν γράφειν· τὸ δὲ ἐπ' ἄμμου τοὺς ἀριθμοὺς γράφειν οὐ μόνον ἐπὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων μεθόδων τῶν τε ἤδη λεχθεισῶν καὶ τῶν ἔπειτα ῥηθησομενῶν χρησιμώτατον πάντη καθίσταται. γίνεται δὲ καὶ ἡ μέθοδος αὕτη τόνδε τὸν τρόπον· ἐκτίθου δύο στίχους, ἀνὰ χώρας ἔχοντας ὅσας βούλει καὶ οἵας· ἐκτίθου δὲ οὕτως ὥστε τὸν πρῶτον τοῦ κατωτέρω στίχου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν τελευταῖον κεῖσθαι τοῦ ἀνωτέρω, καὶ πολλαπλασίαζε τὸν τελευταῖον τοῦ ἀνωτέρω ἐπὶ τὸν τελευταῖον τοῦ κατωτέρω, καὶ τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν εἰ μὲν μοναδικός ἐστι γράφε ἐπάνω τοῦ τελευταίου τοῦ κατωτέρω ἐπ' εὐθείας μέντοι τῷ ἀνωτέρω στίχῳ· εἰ δὲ δεκαδικὸς, γράφε ἐπάνω μὲν τοῦ τοιούτου τελευταίου οὐδὲν, ἐφεξῆς δὲ τῷ οὐδενὶ ὡς πρὸς τὴν ἀριστερὰν ἡμῶν χεῖρα, εἰ μὲν μιᾶς δεκάδος ἦν, τὸν ἀριθμὸν |, εἰ δὲ δύο, ϻ, καὶ ἑξῆς· εἰ δὲ μικτὸς ἦν ἐκ τοῦ μοναδικοῦ καὶ δεκαδικοῦ, τὸν μὲν μοναδικὸν γράφε ἐπάνω, ἐφεξῆς δὲ τῷ ἐπάνω γραφέντι ὡς ἀνωτέρω εἴρηται τὸν δεκαδικόν. εἶτα πολλαπλασίαζε τὸν αὐτὸν τελευταῖον τοῦ ἀνωτέρω στίχου τῷ παρατελεύτῳ τοῦ κατωτέρω καὶ τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν, εἰ μὲν μοναδικός ἐστι, γράφε ἐπάνω ὡς εἴρηται· εἰ δὲ δεκαδικός, λάμβανε τὰς δεκάδας ὅσαι εἰσὶν ὡς μονάδας καὶ ἑνώσας αὐτὰς τῷ ἐπάνω τοῦ τελευταίου γεγραμμένῳ γράφε ταῦτα ὁμοῦ ἐπάνω αὐτοῦ τοῦ τελευταίου, ἐξαλείψας δηλονότι πρότερον τὰ προγεγραμμένα· καὶ τοῦτο ποιῶν καὶ πολλαπλασιάζων τὸν τοῦ ἀνωτέρω στίχου τελευταῖον ἐπὶ τὸν ἀεὶ προηγούμενον τοῦ ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσθη, ἐλθὲ ἐπὶ τὸν πρῶτον τοῦ κατωτέρω στίχου καὶ πολλαπλασίασον καὶ ἐπ' αὐτὸν τὸν τελευταῖον τοῦ ἀνωτέρω, καὶ ἐξαλείψας τὸν τελευταῖον τοῦ ἀνωτέρω γράψον ἐπάνω τοῦ πρώτου τοῦ κατωτέρω τὸν συναχθέντα ἀριθμόν· εἶτα ἐξαλείψας πάντα τὸν κατωτέρω στίχον μετένεγκε αὐτὸν ὡς ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἡμῶν ἐπ' εὐθείας τῇ θέσει ᾗ καὶ πρότερον

ἔκειτο, καὶ γράψον οὕτως ὥστε τὸν μὲν πρῶτον αὐτοῦ ὑπὸ τὸν παρατέλευτον εἶναι τοῦ ἀνωτέρω στίχου, τὸν δὲ δεύτερον ἔνθα τὸ πρότερον ἦν ὁ πρῶτος, καὶ τὸν τρίτον ἔνθα ὁ δεύτερος. καὶ ἐφ᾽ ὅσον εἰσὶν αἱ χῶραι· καὶ ποιήσας κἀνταῦθα τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τοῦ παρατελεύτου τοῦ ἀνωτέρω ἐπὶ πάντας τοὺς τοῦ κατωτέρω κατὰ τὴν ἀνωτέρω γεγραμμένην διδασκαλίαν πάλιν μετένεγκε τοὺς ἀριθμοὺς μέχρις ἂν καταντήσῃς ὥστε τὸν πρῶτον τοῦ κατωτέρω ὑπὸ τὸν πρῶτον πεσεῖν τοῦ ἀνωτέρω, καὶ ποιήσας καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἕξεις τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν εὐτάκτως καὶ κατὰ λόγον κείμενον.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ παραδείγματος σαφὲς γένηται τὸ λεγόμενον, ἐκκείσθωσαν

ϥ ω ʒ
ϥ ω ʒ

δύο στίχοι οἵδε· λέγω οὖν ἑξάκις τὰ ϥ, μϥ· γράφω τὰ μὲν ϥ ἐπάνω τοῦ ϥ, τὰ δὲ μ ἐφεξῆς τοῖς ἐπάνω ϥ· πάλιν λέγω ἑξάκις τὰ ω, μο· γράφω ἐπάνω μὲν τοῦ ω οὐδέν· δεκαδικὸς γὰρ ὁ μο, ἀντὶ δὲ τοῦ μο λαμβάνω μονάδας γ καὶ ἑνώσας αὐτὰς τῷ ϥ ὅς ἐστιν ἐφεξῆς τῷ οὐδενὶ ποιῶ 9 καὶ ἐξαλείψας τὰ ϥ γράφω 9. πάλιν λέγω ἑξάκις τὰ τέσσαρα γʒ· τούτων τὰ μὲν ʒ γράφω ἐπάνω τοῦ ʒ, ἐξαλείψας πρότερον τὸν ϥ ἤτοι τὸν τελευταῖον τοῦ ἀνωτέρω στίχου, ἀντὶ δὲ τῶν γο λαμβάνω μονάδας δύο καὶ ἐξαλείψας τὸ οὐδὲν γράφω τὰ γ, καὶ γί-

μ 9 γ ʒ ω ʒ
ϥ ω ʒ

νεται ὁ ἀριθμὸς ἔχων οὕτως. εἶτα μετατίθημι τὸν κατωτέρω στίχον καὶ γίνεται ἡ θέσις αὐτοῦ τοιάδε· πάλιν οὖν λέγω πεντάκις τὰ ϥ, μο· ἐπάνω μὲν τοῦ ϥ οὐ γράφω τι· ἔδει μὲν γὰρ οὐδὲν γράφεσθαι, ἀλλ᾽ ἐπεὶ

μ 9 γ ʒ ω ʒ
ϥ ω ʒ

κεῖνται γ, οὐδὲν πολυπραγμονῶ πλέον· ἀντὶ δὲ τῶν μο λαμβάνω μονάδας γ καὶ ἑνώσας ταύτας τῷ ἐφεξῆς τῶν γ τῷ 9 ποιῶ Ιγ, ὧν τὰ μὲν γ, ἐξαλείψας τὸν 9, τίθημι, ἀντὶ δὲ τῶν δέκα λαβὼν μονάδα μίαν καὶ ἑνώσας αὐτὴν τῷ ἐφεξῆς τῶν ἤδη γραφέντων γ τῷ μ ποιῶ ʒ καὶ ἐξαλείψας τὰ μ γράφω ʒ· πάλιν λέγω πεντάκις τὰ ω, γω· τούτων τὰ μὲν ω ἑνώσας τῷ ἐπάνω τοῦ ω τῷ ʒ ποιῶ 9 καὶ ἐξαλείψας τὰ ʒ γράφω 9, ἀντὶ δὲ τῶν γο λαμβάνω δύο μονάδας καὶ ἑνώσας τῷ ἐφεξῆς τῶν ἤδη γραφέντων 9 τῷ γ ποιῶ ʒ καὶ ἐξαλείψας τὰ γ γράφω ʒ· πάλιν λέγω πεντάκις τὰ ʒ, γο· ἐξαλείψας τὰ ω γράφω ἐπάνω τῶν ʒ οὐδὲν καὶ ἀντὶ τῶν γο λαβὼν μονάδας δύο καὶ ἑνώσας ταύτας τῷ ἐφεξῆς τῷ ἤδη γραφέντι οὐδὲν τῷ 9 ποιῶ ΙΙ, ὧν τὸ μὲν Ι γράφω ἐπάνω τοῦ ω ἐξαλείψας τὸν 9, ἀντὶ δὲ τῆς δεκάδος λαβὼν μίαν μονάδα καὶ ἑνώσας αὐτὴν τῷ ἐφεξῆς τῷ

ἤδη γραφέντι τῷ ʒ ποιῶ ω καὶ ἐξαλείψας τὰ ʒ γράφω ω, καὶ γένεται ὁ ἀριθμὸς ἔχων οὕτως. εἶτα πάλιν μετατίθημι τὸν κατωτέρω στίχον καὶ γίνεται ἡ θέσις οὕτως· πάλιν οὖν λέγω τετράκις τὰ ч, μʒ· τὰ μὲν ʒ ἑνώσας τῷ ἐπάνω τοῦ ч τῷ Ι ποιῶ ω καὶ ἐξαλείψας τὸ Ι γράφω ω· ἀντὶ δὲ τῶν μο λαβὼν δύο μονάδας καὶ ἑνώσας αὐτὰς τῷ ἐφεξῆς τῷ ἤδη γραφέντι ω τῷ ω ποιῶ ν καὶ ἐξαλείψας τὰ ω γράφω ν· πάλιν λέγω τετράκις τὰ ω, μο· ἐπάνω μὲν τοῦ ω διὰ τὸ προσγεγράφθαι οὐδὲν οὐ γράφω τι, ἀντὶ δὲ τῶν μο λαβὼν μονάδας δύο καὶ ἑνώσας τῷ ἐφεξῆς τῷ ο τῷ ω ποιῶ ν καὶ ἐξαλείψας τὰ ω γράφω ν· πάλιν λέγω τετράκις τὰ ʒ, Ιч· τὰ μὲν ч γράφω ἐπάνω τοῦ ʒ ἐξαλείψας τὸν ʒ, τὴν δὲ ἀντὶ τῶν δέκα μονάδα γράφω ἑξῆς τοῖς ч ἐξαλείψας τὸ ο, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ἔχων οὕτως. καὶ γέγονεν ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ὡς ὁρᾷς. ἡ δὲ δοκιμὴ γίνεται καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου καθὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς προτέρας μεθόδου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τουτέστι τῶν συναχθέντων ἐκ τῶν προτέρων δύο στίχων, συγκρινομένων τοῖς ἐκ τοῦ ὑστέρου καὶ γ^ου^ στίχου, ἐποιησάμεθα τὴν τοῦ διαγράμματος κατατομὴν ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου πολλαχοῦ, διὰ τὸ μὴ δύνατον εἶναι διὰ μέλανος ὑφ' ἓν αὐτὸ συντάξαι ὡς εἴρηται. ἰστέον γε μὴν καὶ τοῦτο, ὡς τὰ τοῦ ἀνωτέρω στίχου σχήματα ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀμείβονται, τὰ δὲ τοῦ κατωτέρω οὐδαμῶς, καὶ ὅτι ἐπειδὰν ὁποῖον δήποτε τῶν τοῦ ἀνωτέρω σχημάτων πρὸς τὸ ὑφ' ἑαυτὸ τοῦ κατωτέρω πρὸς ὀρθὰς πολλαπλασιάζηται, αὐτὸς μὲν ὁ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ἀριθμὸς οὐ συνεισάγεται τῷ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γεγονότι, ἀλλ' αὐτοῦ ἐξαλειφομένου μόνος ἐκεῖνος γράφεται ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συναγόμενος, ἐπειδὰν δὲ πρός τινα τῶν ἄλλων πολλαπλασιαζόμενος ποιῇ ἕτερον, ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τότε καὶ τὸν εὑρισκόμενον ἐπάνω τοῦ ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζεται συνεισάγομεν καὶ ἑνοῦμεν τῷ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀποβάντι. καὶ περὶ μὲν πολλαπλασιασμοῦ τοσαῦτα, ἰτέον δὲ ἤδη καὶ ἐπὶ τὸν μερισμόν.

ʒ μ ω Ι ο ʒ
ч ω ʒ

ʒ μ ω Ι ο ʒ
ч ω ʒ

ʒ μ ν ν Ι ч
ч ω ʒ

Περὶ μερισμοῦ.

Μερισμός ἐστιν, ὅταν μερίζοντες ἀριθμὸν πρὸς ἀριθμὸν σκοπῶμεν τί ἑκάστῃ μονάδι τοῦ πρὸς ὃν ὁ μερισμὸς γίνεται ἐπιβάλλει· οἷον ὅταν τὸν ἕξ

ἐπὶ τὸν τρία μερίζοντες σκοπῶμεν τί ἑκάστῃ [μονάδι] τοῦ τρία ἐπιβάλλει, ἐπιβάλλουσι δὲ δύο μονάδες, ἐπειδὴ καὶ τρεῖς τὰ δύο, ἕξ. γίνεται δὲ ὁ μερισμὸς ἢ ἀπὸ τῶν ἐλαττόνων ἀριθμῶν εἰς πλείονα πρόσωπα, ἢ ἀπὸ ἴσων εἰς ἴσα, ἢ ἀπὸ πλειόνων εἰς ἐλάττονα. καὶ ἀπὸ μὲν ἐλαττόνων ἀριθμῶν εἰς πλείονα πρόσωπα γίνεται οὕτως· γράψον τὸν μὲν ἐλάττονα ἐπάνω, τὸν δὲ μείζονα κάτω, καὶ εἰ μέν ἐστιν ὁ ἐπάνω τρία, ὁ δὲ κάτω δώδεκα, εἰπὲ ὅτι ἑκάστῃ μονάδι τοῦ δώδεκα ὀφείλεται τρία δωδέκατα, ἅπερ ἐστὶν ἑνὸς δ^ον, εἰ δὲ ἐπάνω τρία, κάτω δὲ πέντε, εἰπὲ ὅτι τρία πέμπτα, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως. μερίζεται δὲ ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς παρὰ τὸν μείζονα οὕτως· ἔστω βούλεσθαι μερίσαι τὸν τρίτον παρὰ τὸν πέμπτον· ἐπεὶ ὁ μεριζόμενος μείζων εἶναι ὀφείλει τοῦ παρ' ὃν μερίζεται, οὕτω γὰρ καὶ τοσαῦτα μέρη ἔχει, ὅσων ἐστὶ μονάδων ὁ παρ' ὃν μερίζεται, ἐνταῦθα δὲ ἐλάττων ἐστὶν ὁ μεριζόμενος, χρεία πάντως μεθόδου τινὸς, ὡς ἂν ὁ τρίτος μείζων τοῦ πέμπτου γενόμενος δυνηθῇ παρ' αὐτὸν μερισθῆναι· γίνεται τοίνυν οὕτως· τέμνω ἑκάστην μονάδα τοῦ τρία εἰς τοσαῦτα μόρια, ὅσων μονάδων ἐστὶν ὁ μερίζων ἤτοι ὁ ε̅, καὶ ἐπεὶ τρεῖς μονάδες εἰσὶ τοῦ τρίτου, ἑκάστη δὲ τέμνεται εἰς ε̅, δηλονότι ιε̅ γίνονται· ταῦτα δὲ τὰ δεκαπέντε, πέμπτα μονάδων ἐστὶν, εἴπερ ἡ μονὰς εἰς πέντε τεμνομένη πέμπτα ποιεῖ, ὥσπερ καὶ εἰς ἓξ ἕκτα, καὶ ἐφεξῆς· γέγονε τοίνυν τὰ ιε̅ κατὰ τὴν ἀπαρίθμησιν προδήλως τοῦ πέντε μείζονα, τουτέστιν ὁ τρίτος ὁ ἐλάττων, τμηθεὶς εἰς τὰ μόρια τὰ ὁμώνυμα τῷ μείζονι, γέγονε μείζων τοῦ μείζονος· ἐπεὶ δὲ τοῦθ' οὕτω γέγονε, σαφὴς ἐντεῦθεν ὁ μερισμός· μεριζέσθω δὴ ὁ ιε̅ παρὰ τὸν ε̅, παρ' ὃν ὁ τρίτος, ἄτμητος ὤν, εἰ καὶ ἀδύνατον μερισθῆναι, καὶ ἐπιβάλλει ἑκάστῃ μονάδι τοῦ ε̅ τρία πέμπτα, πέμπτα γὰρ ἦν τὰ πεντεκαίδεκα. καὶ τοῦτον τὸν τρόπον μερίζεται ὁ ἐλάττων παρὰ τὸν μείζονα, κατὰ μὲν τὴν ποσότητα τῶν μορίων ὁμωνύμως ἑαυτῷ, κατὰ δὲ τοὔνομα τῶν μορίων ὁμωνύμως τῷ μείζονι· ἦν δὲ ποσότης μὲν τῶν μορίων τὰ τρία, τοῦτο δὲ καὶ ὁ ἐλάττων ἦν, ὄνομα δὲ τῶν μορίων τὰ πέμπτα, ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ ε̅ ὀνομασθέντα. ἔστι δὲ ὅτε τὰ τοιαῦτα μόρια δυνάμεθα ἔν τινι περιλαβεῖν μορίῳ καὶ δι' ἑνὸς ὀνόματος ὀνομάσαι, ὡς ὅταν τὰ τρία δωδέκατα, ἑνὸς τέταρτον λέγωμεν· ἔστι δὲ ὅτε οὐ δυνάμεθα, ὡς ὅταν τρία πέμπτα λέγωμεν, ταῦτα γὰρ οὐ πέφυκε ἓν μόριον ἀριθμοῦ συναχθέντα γενέσθαι. γίνεται δὲ καὶ τοῦτο τόνδε τὸν τρόπον· σκοπεῖν χρὴ τοὺς δύο ἀριθμούς, τὸν ἐλάττονά φημι καὶ τὸν μείζονα, εἴ τινι κοινῷ μέτρῳ παρὰ τὴν μονάδα μετροῦνται, τουτέστιν ἢ δυάδι ἢ τριάδι καὶ ἐφεξῆς, ἀεὶ δὲ

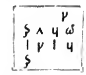
ζητεῖν τὸ μεῖζον μέτρον, οἷον ὁ η καὶ ὁ ιβ μετροῦνται μὲν καὶ κοινῷ μέτρῳ τῇ δυάδι, μετροῦνται δὲ καὶ τῇ τετράδι· τὸν τέσσαρα γοῦν ἐνταῦθα κοινὸν μέτρον ἔχειν τῶν δύο ἀριθμῶν· καὶ μὴ τὸν β, εἰ μὲν οὖν κοινῷ τινι μέτρῳ μετροῦνται οἱ ἀριθμοὶ, δυνάμεθα τὰ πολλὰ μόρια ἐλάττονι ὀνόματι ὀνομάσαι καὶ ποιῆσαι τὴν ὑπόστασιν αὐτῶν μᾶλλον εὔληπτον· οἷον ἔστω μερίσαι τὸν δον παρὰ τὸν κ· λέγομεν οὖν, ἐπιβάλλει ἑκάσῃ μονάδι τοῦ κ τέσσαρα εἰκοστὰ, ἀλλ᾽ ἐπεὶ τοῦ δου καὶ τοῦ κ κοινὸν μέτρον ἐστὶν αὐτὸς ὁ τέσσαρα καὶ μετρεῖ ὁ δ ἑαυτὸν μὲν ἅπαξ, τὸν δὲ κ πεντάκις, λέγω τὰ δ εἰκοστὰ εἶναι ἓν πέμπτον· ἓν μὲν διὰ τὸ ἅπαξ, πέμπτον δὲ διὰ τὸ παντάκις· τὸ δ᾽ ἓν πέμπτον ἑνὸς χρὴ πέμπτον νοεῖν, τουτέστι μιᾶς μονάδος τῶν δ πέμπτον. ἢ καὶ οὕτως ἐπεὶ ὁ δ πεντάκις μετρεῖ τὸν κ, τμηθήτω ἑκάστη μόνας αὐτοῦ εἰς ε καὶ γίνονται κ πέμπτα· ἐπιβάλλει οὖν ἑκάστῃ μονάδι τοῦ κ ἓν πέμπτον. ἀλλὰ τοῦτο μὲν ἐπὶ μόνων τῶν πολλαπλασίων, τὸ δὲ πρότερον καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ἄλλων, πάλιν γὰρ περὶ ἐκείνου λέγομεν· ἔστω μερίσαι τὸν η παρὰ τὸν ιβ ἐλέγομεν οὖν, ἐπιβάλλει ἑκάστῃ μονάδι τοῦ ιβ η δωδέκατα, ἀλλ᾽ ἐπεὶ τοῦ η καὶ τοῦ ιβ κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ τέταρτος, τὸν μὲν η δὶς, τὸν δὲ ιβ τρὶς, λέγω τὰ η δωδέκατα δύο εἶναι τρίτα, τουτέστι δίμοιρον μονάδος, δύο μὲν διὰ τὸ δὶς, τρία δὲ διὰ τὸ τρὶς· καὶ γίνεται καὶ ἐνταῦθα ἡ μὲν ποσότης τῶν μορίων ὁμώνυμος τῇ ἐλάττονι μετρήσει, ὡς τὰ β τῇ δὶς, τὸ δὲ αὐτῶν ὄνομα ὁμώνυμον τῇ μετρήσει, ὡς τὰ τρία τῇ τρὶς. εἰ μὲν οὖν κοινῷ μέτρῳ μετροῦνται οἱ ἀριθμοὶ, οὕτω γίνεται, εἰ δὲ μόνῃ μονάδι μετροῦνται, τήν τε ἐξ ἀρχῆς ποσότητα καὶ τὸ ὄνομα ἔχουσιν, οἷον ὁ τρίτος παρὰ τὸν ε γίνονται τρία πέμπτα, καὶ ταῦτα οὐκ ἔστι συστεῖλαι, ἀλλ᾽ ἀεὶ οὕτως ὀνομασθήσεται.

Καὶ μὲν καὶ τοῦτο εἰδέναι χρεὼν, ὡς ἐάντε ἐλάττων ἀριθμὸς μερίζηται παρὰ μείζονα, ἐάντε μείζων παρὰ ἐλάττονα, ἡ μὲν ποσότης τῶν ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ μορίων ἡ αὐτὴ ἀεὶ τῷ μεριζομένῳ ἔσται, τὸ δ᾽ ὄνομα αὐτῶν ὁμώνυμον τῷ παρ᾽ ὃν ὁ μερισμὸς γίνεται· οἷον ἔστω μερίσαι τόν δ παρὰ τὸν ιβ, τὸν ἐλάττω παρὰ τὸν μείζονα, λέγω οὖν ὡς ἐπιβάλλει ἑκάστῃ μονάδι τῶν ιβ δ δωδέκατα, ἅπερ ἐστὶ μονάδος τρίτον, καὶ ἔστι τὰ μὲν τέσσαρα ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τῷ μεριζομένῳ δω, τὰ δὲ δωδέκατα ὁμώνυμα τῷ παρ᾽ ὃν ὁ μερισμὸς γίνεται τῷ δωδεκάτῳ. πάλιν ἔστω μερίσαι τὸν ιβ παρὰ τὸν δ, τὸν μείζω παρὰ τὸν ἐλάττονα, οὐκοῦν ἐπιβάλλει ἑκάστῃ μονάδι τοῦ δ δώδεκα τέταρτα, ἅπερ εἰσὶ τρεῖς μονάδες, καὶ ἔστι κἀνταῦθα τὰ μὲν ιβ ἡ τῶν μορίων ποσότης, τὰ αὐτὰ τῷ μεριζομένῳ τῷ ιβ, τὸ δ᾽ ὄνομα αὐτῶν, τουτέστι τὰ τέταρτα, ὁμώνυμα τῷ παρ᾽ ὃν ὁ μερισμὸς γίνε-

ται τῷ τετάρτῳ· ὅρα δὲ ὅπως τὰ μὲν $\overline{\delta}$ δωδέκατα τρίτον ἦν μονάδος, τὰ δὲ δώδεκα τέταρτα μονάδες τρεῖς· καθόλου γὰρ ἐὰν τὰ ἐλάττονα μερίζηται παρὰ μείζονα, μόρια μονάδος ποιεῖ, ἐὰν δὲ μείζων παρὰ ἐλάττονα, μονάδας. ἀπὸ μὲν οὖν ἐλαττόνων ἀριθμῶν εἰς πλείονα πρόσωπα τόνδε τὸν τρόπον γίνεται, ἀπὸ δὲ ἴσων εἰς ἴσα παντάπασι δῆλον· ἑκάστῃ γὰρ μονάδι ἀεὶ μία μονὰς ἐπιβάλλει. ἀπὸ δὲ πλειόνων εἰς ἐλάττονα γίνεται πολλαπλῶς· ἢ γὰρ εἰς μοναδικὸν ἀριθμὸν γίνεται ὁ μερισμὸς τουτέστιν ἀπὸ μονάδος μέχρι καὶ αὐτῶν τῶν ἐννέα, ἢ εἰς δεκαδικὸν τουτέστι δέκα ἢ εἴκοσι καὶ ἑξῆς μέχρι τῶν ἐνενήκοντα, ἢ εἰς μικτὸν ἐκ τούτων, ἢ εἰς ἑκατονταδικόν, ἢ εἰς ἑκατονταδικὸν ὁμοῦ καὶ δεκαδικόν, ἢ εἰς ἑκατονταδικὸν ὁμοῦ καὶ δεκαδικὸν καὶ μοναδικόν, ἢ καὶ ἐπέκεινα καθ᾽ ὅσον ἄν τις προβαίνειν βούλεται. καὶ πρῶτον πάντων ῥητέον, πῶς εἰς μοναδικὸν ἀριθμὸν ὁ μερισμὸς γίνεται· ἐκκείσθω στίχος ὁποσωνοῦν βούλει σχημάτων, εἶτα ὑπ᾽ αὐτὸν ὁ μοναδικὸς ἀριθμός, οὕτως ὡς μέσον αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ῥηθέντος στίχου ἕτερον στίχον χωρεῖν δύνασθαι· εἰ μὲν οὖν μείζων ἐστὶν ὁ τελευταῖος τοῦ στίχου τοῦ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ, σκόπει ποσάκις ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεῖσθαι δύναται, καὶ ὁσάκις ἂν ἀφαίρηται, γράφε τοσαύτων μονάδων ἀριθμὸν ὑπὸ τὸν μείζονα· καὶ εἰ μὲν μηδὲν περιττεύει ἀπὸ τοῦ μείζονος μετὰ τὴν ὁσάκις δηποτοῦν ἀφαίρησιν ἀπ᾽ αὐτοῦ τοῦ ἐλάττονος, πάλιν ἀφαίρει τὸν τοιοῦτον μοναδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ παρατελεύτου, καὶ καθ᾽ ὃν ἀφαιρεῖς ἀριθμὸν ἐξ αὐτοῦ τὸν μοναδικόν, πάλιν γράφε τοῦτον ὑπ᾽ αὐτόν· εἰ δὲ περιττεύει τι ἀπὸ τοῦ μείζονος, γράφε τοῦτο μικρὸν ἀνωτέρω τοῦ μεταξὺ τοῦ τελευταίου καὶ τοῦ παρατελεύτου, καὶ ἑνῶν αὐτὸ τῷ παρατελεύτῳ τὸ μὲν τοιοῦτον λεῖμμα λάμβανε ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ παρατέλευτον ὡς μοναδικόν, καὶ πάλιν σκόπει ποσάκις ἀφελεῖν δύνῃ τὸν μοναδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ τοιούτου μικτοῦ, καὶ καθ᾽ ὃν ἂν ἀριθμὸν ἀφεῖλες αὐτόν, πάλιν γράφε ὑπὸ παρατέλευτον. καὶ τοῦτο ποίει μέχρις ἂν εἰς τὸν πρῶτον ἀφίκῃ καὶ τοῦτο μὲν εἰ μείζων ἐστὶν ὁ τελευταῖος τοῦ μοναδικοῦ, εἰ δ᾽ ἴσος, ἀφαίρει ἅπαξ τὸν μοναδικὸν ἐξ αὐτοῦ, καὶ γράφε ὑπὸ τὸν τελευταῖον μονάδα, καὶ ἔρχου ἐπὶ τὸν παρατέλευτον καὶ ποίει κατὰ τὴν ἀνωτέρω διάταξιν· εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ μοναδικὸς τοῦ τελευταίου, ἐπεὶ μὴ δυνατὸν μηδ᾽ ἅπαξ ἀφαιρεθῆναι τὸν μείζονα ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, ἑνώσας τὸν τελευταῖον καὶ τὸν παρατέλευτον καὶ ποιήσας αὐτοὺς μικτὸν ἀριθμὸν ἄφελε τὸν μοναδικὸν ἐξ αὐτῶν ὁσάκις ἂν δύνῃ, καὶ τὸν ἀριθμὸν καθ᾽ ὃν ἀφεῖλες αὐτὸν μηκέτι ὑπὸ τὸν τελευταῖον ἢ ὑπὸ τὸν παρατέλευτον γράφε· καὶ πάλιν χώρει ἐπὶ τὰ πρόσω. ἔστω δὲ διάγραμμα.

οὗ ἐλάττων ὁ μοναδικὸς τοῦ τελευταίου τόδε· δύναμαι τὸν μ ἀφελεῖν ἅπαξ ἀπὸ τοῦ ϛ, καὶ γράφω ὑπὸ τὸν ϛ, |· κατελείφθη καὶ μονὰς μία· ταύτην τίθημι μικρὸν ὑπεράνω τοῦ μεταξὺ τοῦ τελευταίου καὶ τοῦ παρατελεύτου καὶ ἑνώσας τῷ παρατελεύτῳ τῷ ʌ ποιῶ |ʌ· καὶ ἐπεὶ δύναμαι πάλιν τὸν μ ἀφελεῖν ἑξάκις ἀπὸ τοῦ |ʌ, γράφω ὑπὸ τὸν ʌ, ч· καὶ ἐνταῦθα οὐ κατελείφθη τι· πάλιν δύναμαι ἀφελεῖν τὸν μ δὶς ἀπὸ τοῦ ἓξ καὶ γράφω γ ὑπὸ τὸν ч, καὶ οὐδ' ἐνταῦθα καιελείφθη τι· πάν δύναμαι ἀφελεῖν τὰ μ ἅπαξ ἀπὸ τοῦ ω καὶ γράφω ὑπὸ τὸν ω, |, καὶ κατελείφθησαν ἀπὸ τοῦ ω καὶ γ· ταῦτα γράφω ἐκτὸς τοῦ στίχου, καὶ μερίζω τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἑκατέραν ἢ εἰ πλείονες εἶεν ἑκάστην εἰς μόρια ὅσων μονάδων ἦν ὁ μοναδικὸς ἀριθμός· ἦν δὲ μονάδων τριῶν· εἰς τρίτα ἄρα μερίζω τὰς ἐν τῷ δύο μονάδας, καὶ λέγω ὅτι τὸ τρίτον τῶν ͵δωξε ἐστὶ χίλια ἑξακόσια εἴκοσι ἓν καὶ δύο τρίτα ἅ ἐστι δίμοιρον. πάλιν ἔστω διάγραμμα οὗ ὁ μοναδικὸς ἴσός ἐστι τῷ τελευταίῳ· λέγω οὖν ἅπαξ τὰ δ̄ ϛ· γράφω | ὑπὸ τὸν ϛ· δὶς τὰ ϛ, ʌ· γράφω γ ὑπὸ τὸν ʌ· ἅπαξ τὰ ϛ, ϛ· γράφω | ὑπὸ τὸν ч, λοιπὰ γ· ταῦτα γράφω ὡς εἴρηται μικρὸν ἀνωτέρω τοῦ μεταξὺ τοῦ ч καὶ τοῦ ω καὶ ἑνῶν τῷ ω ποιῶ γω, καὶ ἀφαιρῶν ἑξάκις ἐξ αὐτοῦ τὰ ϛ γράφω ὑπὸ τὸν ω, ч· λοιπὴ μονὰς ἥτις γίνεται ἓν τέταρτον· καὶ ἔστι τὸ δ^ον^ τῶν ͵δωξε ͵ασ δέκα ἓξ καὶ μονάδος τέταρτον ἕν. καθόλου μὲν οὖν ὁ μείζων ἀριθμὸς ἐνταυθοῖ εἰς ἐλάττονα ἐμερίσθη, τὰ γάρ ϛʌчω πρὸς ϛ, κατὰ μέρος δὲ καὶ πρὸς ἴσον καὶ ἐλάττονα καὶ μείζονα· πρὸς ἴσον μὲν ὅταν ὁ ϛ πρὸς τὸν ϛ ἐμερίζετο, πρὸς ἐλάττονα δὲ ὁ ʌ καὶ ὁ ч καὶ ὁ ω πρὸς τὸν αὐτὸν ϛ, πρὸς μείζονα δὲ ὅταν ἡ μονὰς πρὸς τὸν ϛ.

|
ϛ ʌ ч ω
| ч γ |
μ



Πάλιν ἐκκείσθω διάγραμμα οὗ ὁ μοναδικὸς ἀριθμὸς μείζων ἐστὶ τοῦ τελευταίου· ἐπεὶ μὴ δύναμαι ἀφελεῖν τὸν ω ἀπὸ τοῦ ϛ, ἑνῶ τὸν ϛ καὶ τὸν ʌ καὶ ποιῶ ϛʌ, καὶ ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν ἐννεάκις τὸν ω ἤτοι ϛω· γράφω τὸν 9 ὑπὸ τὸν ʌ, λοιπὰ μ· ταῦτα ἑνῶν τῷ ч ποιῶ μч· ἀφαιρῶ ἐκ τούτων ἑπτάκις τὸν ω καὶ γράφω ὑπὸ τὸν ч τόν ν, λοιπὴ μονάς· ταύτην ἑνῶ τῷ ω καὶ ποιῶ |ω· ἀφαιρῶ τρὶς τὸν ω ἀπὸ τούτων καὶ οὐ μένει τι, καὶ γράφω τὸν μ ὑπὸ τὸν ω· καὶ γίνεται τὸ πέμπτον τῶν ͵δ ὀκτακοσίων ξ̄ε, π͵ογ.

μ |
ϛ ʌ ч ω
9 ν μ
ω

Καὶ ταῦτα μὲν εἰ μοναδικός ἐστιν ὁ ἀριθμὸς πρὸς ὅν μερίζεται ὁ στίχος· εἰ δὲ δεκαδικὸς εἴη, εἴη δὲ καὶ ὁ ἐκκείμενος στίχος δεκαδικὸς, ἀφαιρῶ τὸν κάτω ἀπὸ τοῦ ἄνω, δεῖ γὰρ πάντοτε ἐνταῦθα μείζονα εἶναι τὸν ἄνω τοῦ κάτω· καὶ ἀφελὼν ὁσάκις ἂν δύνωμαι, γράφω ὑπὸ τὸν ἄνω τὸν ἀριθμὸν καθ' ὃν ἀφηρέθη, καὶ εἰ μὲν μηδὲν περιττεύει, ποιῶ καθὼς ἐν τοῖς ἀνωτέρω εἴρηται. καὶ ἔστω διάγραμμα τόδε· ἀφαιρῶ ἅπαξ τὸν μ *ἀπὸ τοῦ* ȝ *καὶ γράφω* | *ὑπὸ τὸν* ȝ. *περιττεύει καὶ ἕν· τοῦτο μερίζω εἰς* μο *καὶ λέγω τὸν τριακοστὸν τῶν τεσσαράκοντα εἶναι μονάδα καὶ μονάδος τριακοστὸν ἕν. εἰ δὲ ὁ μὲν ἐπάνω εἴη δεκαδικός, ὁ δὲ κατωτέρω μοναδικός, γίνεται οὕτως· ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ* ȝ *τὸν* μ *ἅπαξ καὶ γράφω* |*· περιττεύει μονάς· αὕτη πρὸς τὸ ἐκκείμενον οὐδὲν δεκὰς λαμβάνεται, καὶ ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῆς τρὶς τὸν* μ *καὶ γράφω ὑπὸ τὸ* ο. μ, *λοιπὴ μονάς· ταύτην μερίζω εἰς* μ *καὶ λέγω τῶν τεσσαράκοντα τὸ τρίτον εἶναι ιγ καὶ μονάδος ἕν. εἰ δ' ὁ μὲν ἀνωτέρω εἴη δεκαδικὸς, ὁ δὲ κατωτέρω μικτὸς, ποιῶ οὕτως· ἀφαιρῶ τὸν* μ *ἅπαξ ἀπὸ τοῦ* ȝ *καὶ γράφω* |, *λοιπὸν* |*· τοῦτο γίνεται* |ο*· ἀφαιρῶ ἔτι ἅπαξ ἀπὸ τούτου τὰ* ч, *λοιπὰ* ȝ*· καὶ λέγω ὅτι τῶν* ȝο *τὸ τριακοστὸν ἕκτον ἐστὶ μονὰς καὶ τριακοστόεκτα τέσσαρα, ἅ εἰσιν θ''. ταῦτα μὲν οὖν καὶ εἰ δεκαδικὸς εἴη ὁ ἀνωτέρω στίχος· εἰ δὲ μικτὸς, γίνεται οὕτως· ἐκτίθημι τὸν ὑποκείμενον στίχον καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸν μικτὸν ὅς ἐστιν κδ· λέγω οὖν τετράκις τὰ* γ, ʌ*· θέλω τοίνυν εἰπεῖν καὶ τετράκις τὰ* ȝ *ἀπὸ τοῦ* ω, *ἀλλ' οὐ δύναμαι· ἀφαιρῶ τοίνυν ἀπὸ τοῦ τετράκις μονάδα καὶ λέγω τρὶς τὰ* γ, ч*· γράφω [ὑπὸ τὸν]* ʌ *τὰ* μ, *λοιπὰ* γ*· ταῦτα γράφω μικρὸν ἀνωτέρω τοῦ μεταιχμίου τοῦ* ʌ *καὶ τοῦ* ω*· καὶ πάλιν λέγω τρὶς τὰ* ȝ, |γ*· ἦσαν τὰ* γ *καὶ* ω, γω*· ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν τὰ* |γ, *λοιπὰ* |μ*· ταῦτα γράφω ἐπάνω πρὸς ὀρθὰς τοῦ* ω, *ὑπὸ δὲ τὸν* ω *οὐ γράφω τι διὰ τὸ αὐτὸν τὸν* μ *ὑπὸ τὸν* ʌ *κείμενον πολλαπλασιάζεσθαι πρός τε τὰ* γ *καὶ τὰ* ȝ*· πάλιν δύναμαι ἀπὸ τῶν* |μ *ἑξάκις ἀφελεῖν τὰ* γ*· καταλειφθέντος α καὶ ἑνωθέντος τῷ* ч *γίνονται* |ч*· ἀλλ' ἐπεὶ οὐ δύναμαι καὶ ἑξάκις τὰ* ȝ *ἀφελεῖν ἀπὸ τῶν* |ч, *ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ ἑξάκις μονάδα καὶ λέγω πεντάκις τὰ* γ, |ο*· γράφω ὑπὸ τὸν* ω, ω, *λοιπὰ* μ*· ταῦτα γράφω ὑπὲρ τὸ μέσον τοῦ* ω *καὶ* ч, *καὶ γίνονται* μч*· καὶ λέγω πεντάκις τὰ* ȝ, γο, *λοιπὰ* |ч*·*

|
ȝ ο
|
μ ο

|
ȝ ο
| μ
μ

	γ	|μ		μ	|ч		γ	|		μ		
ʌ		ω			ч		9		v		ʌ	
μ		ω			v		ο		v			
γ		ȝ										

ταῦτα γράφω ἐπάνω πρὸς ὀρθὰς τοῦ ч· καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ |ч ἅπαξ οὐ δύναμαι ἀφελεῖν γϟ, γράφω καὶ λέγω ἑπτάκις τὰ δ̄ γʌ, λοιπὴ |· *) ἐπεὶ μὴ δύναμαι ἀπὸ ταύτης ἀφελεῖν τὸν γ, ἑνῶ αὐτὴν τῷ v καὶ γίνεται |v· πάλιν δύναμαι ἀπὸ τῶν |v ἀφελεῖν ὀκτάκις τὸν γ, ἀλλ' ἐπεὶ λειπομένης μονάδος καὶ προστιθεμένης τῷ ʌ οὐ δύναμαι καὶ ὀκτάκις τὸν ϟ ἀπὸ τῶν |ʌ ἀφελεῖν, ἀφαιρῶ μονάδα ἀπὸ τοῦ ὀκτάκις καὶ λέγω ἑπτάκις τὰ γ, |ϟ· γράφω ὑπὸ τὸν v, v, λοιπὰ ɰ· ταῦτα προστίθημι τῷ ʌ καὶ γίνονται ɰʌ, καὶ λέγω ἑπτάκις τὰ ϟ, γʌ, λοιπὰ |ο· ταῦτα γράφω ἔξωθεν τοῦ στίχου. ὑπὸ μὲν τὸν 9 οὐκ ἐτέθη τι σημεῖον, ἀλλὰ μόνον οὐδὲν, ἐπειδὴ μὴ ἀφῃρέθη ἐξ αὐτοῦ ὁ ὕστερος τοῦ μικτοῦ ἀριθμὸς ὅς πρῶτος λαμβάνεται τουτέστιν ὁ γ· ἀλλ' οὐδ' ὑπὸ τὸν ʌ ὅν ἐπὶ τῆς δεξιᾶς λέγω χειρὸς διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐγράφη τι.

Ἰστέον δὲ καὶ τοῦτο, ὡς ἡνίκα ἂν ὁ ἀριθμὸς πρὸς μοναδικὸν μερίζεται ἀριθμὸν, ἀφαιρετέον τὸν τοιοῦτον μοναδικὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀεὶ ὁσάκις ἂν ἐγχωρεῖ· ἐπειδὰν δὲ πρὸς μικτὸν, μηκέτι ἀεὶ ὁσάκις ἂν ἐγχωρῇ τὸν ὕστερον τοῦ μικτοῦ ὅς πρῶτος λαμβάνεται ἀφαιρετέον, ἀλλ' ἔστιν ὅτε καὶ ἀφαιρεῖν δεῖ, καθὼς ἐν τῷ ἀνωτέρω ἐδείχθη διαγράμματι, ἡνίκα τετράκις δυνάμενοι τὰ γ εἰπεῖν. τρεῖς τὰ γ εἴπομεν· γίνεται δὲ τοῦτο ἐπειδὰν τοῦ ὑστέρου ἀπὸ τοῦ τελευταίου ἀφαιρεθέντος, μὴ καὶ ὁ πρότερος δύναιτο ἀπὸ τοῦ παρεσχάτου ἀφαιρεθῆναι. καὶ τοῦτο γὰρ εἰδέναι χρεὼν ὡς οὔτε ὁ ὕστερος καὶ ὁ πρότερος ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ποτε ἀφαιροῦνται, οὔτε ὁ μὲν ὕστερος ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου, ὁ δὲ πρότερος ἀπὸ τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου, ἀλλ' ἀεὶ τοῦ ὑστέρου ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου, ἀνάγκη καὶ τὸν πρότερον ἀπὸ τοῦ παρεσχάτου ἀφαιρεῖσθαι τὰ μέντοι τούτων ἐναντία γίνεσθαι πέφυκεν, ἵνα δηλονότι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὁ πρότερος ἀφαιρεθῇ καὶ ὁ ὕστερος, ὥσπερ ἐν τῷ προλαβόντι διαγράμματι ἀπὸ τοῦ κε· τρὶς τε τὰ ϟ ἀφείλομεν καὶ πεντάκις τὰ γ. καὶ ἔτι ἵνα ὁ μὲν πρότερος ἀπὸ τινος ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ, ὁ δὲ ὕστερος ἀπὸ τοῦ τρίτου ἐξ ἐκείνου, καθὰ δὴ καὶ ἐν τῷ προκειμένῳ διαγράμματι ὁ μὲν πρότερος ἀφαιρεῖται ἅπαξ ἀπὸ τοῦ παρατελεύτου, ὁ δὲ ὕστερος ἀπὸ τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ παρατελεύτου, ὅτε δύο τζίφραι ἐφεξῆς διὰ μέσου πίπτουσιν· εἰ γὰρ ὅθεν ὑφαιρεῖς τὸν νστερον ὑπ'

*) Hier ist eine Lücke, ausserdem aber der Text corrumpirt. Ferner fehlt im Manuscript die Darstellung der Rechnung; ich habe sie nach Anleitung des Manuscripts ergänzt.

ἐκεῖνον τιθῇς τὸν ἀριθμὸν τὸ σημεῖον καθὸ ἀφαιρεῖται αὐτόθεν, ἔσται σοι φανερὸν ποῦ τε χρὴ τιθέναι οὐδὲν ἤτοι ο καὶ ποῦ μίαν ἢ δύο ἢ καὶ πλείους. ὑπ' ἐκεῖνον δ' ἐλέγομεν τιθέναι τὸν ἀριθμὸν τὸ σημεῖον, ὅστις οὐχ ὡς δεκὰς λαμβάνεται, ἀλλ' ὡς μονὰς, οἷον ὡς ἐπὶ τοῦ προυποτεθέντος διαγράμματος μετὰ τὸ γ καὶ ν καὶ γ κείμενον *), ἐπεὶ μηδὲ αὐτὸν ἀφελεῖν τὸν ν ἤτοι τὸν ὕστερον τῶν δύο πρὸς οὓς ὁ μερισμὸς γίνεται ἀπὸ τοῦ γ· καὶ ἑνουμένων τῶν γ τῷ ἐφεξῆς ν καὶ γινομένων γν, καὶ οὕτω τρὶς τοῦ ν ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ γν καὶ ὅλου τοῦ γν· οὐ γὰρ ἐξ αὐτοῦ τοῦ γ ἀφῃρέθη τρὶς ὁ ν, ἀλλ' ἀπὸ ὅλου τοῦ γν· διὰ τοῦτο τοίνυν ὑπὸ τὸν ν τὰ μ τίθημι· εἰ γὰρ μὲν ἦν τὰ ν, οὐκ ἠδύνατο τὰ γ γένεσθαι εἴκοσιν. οὐ μόνον δὲ περὶ τὰ μέσα τίθεται τὸ οὐδὲν, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τοῦ τέλους· τέλος δὲ λέγω τὰ δεξιὰ ἡμῶν. ἢν μὲν γὰρ δύο τόποι ἤτοι χῶραι καταλειφθῶσι ὑφ' ἃς οὐ γράφεταί τι, ὑπὸ μὲν τὴν πρὸς τὴν ἀριστερὰν γράφε οὐδὲν, ὑπὸ δὲ τὴν πρὸς τὴν δεξιὰν μηδὲν· εἰ δ' εἷς καταλιμπάνεται τόπος, μηδὲν ὑπ' αὐτὸν τίθει· κείσθω δὲ παράδειγμα πῶς ἐπὶ τέλους γράφεται οὐδέν· λέγω γοῦν ἅπαξ τὰ γ, γ, ἅπαξ τὰ ν, ν· εἶτα ἠδυνάμην καὶ ἅπαξ τὰ γ, γ, ἀλλ' ἐπεὶ οὐ δύναμαι καὶ ἀπὸ τοῦ ϟ ἅπαξ ἀφελεῖν τὰ ν, ποιῶ γ καὶ ϟ, καὶ λέγω ἐννεάκις τὰ γ, Ιλ· τῷ μ ποιῶ γμ· ἃ καὶ γράφω ἐκτὸς στίχου ὡς λεπτὰ, ἐλάττονα γμ γάρ ἐστι τοῦ γν. πρὸς ὃν ὁ μερισμὸς ἐγίνετο· καὶ μένουσιν αἱ ὑπὸ τὸν ω καὶ τὸν μ χῶραι κεναί· διὰ τοῦτο τίθημι ὑπὸ μόνην τὴν τοῦ ω χώραν οὐδὲν, ὑπὸ δὲ τὴν τοῦ μ οὐ γράφω τι.

Περὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου.

Ῥητέον ἡμῖν ἤδη καὶ περὶ ζωδίων καὶ μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων τε καὶ δευτέρων. ἰστέον τοίνυν ὡς κατὰ τὸν οἰκεῖον κύκλον ὁ ἥλιος διέρχεται ζώδια ιβ, ὧν ἕκαστον εἰς μο τέμνεται μοίρας, ἑκάστη δὲ μοῖρα εἰς λεπτὰ α ϥο. καὶ ἕκαστον πρῶτον εἰς ϥο δεύτερα, καὶ ἕκαστον τῶν δευτέρων εἰς ϥο τρίτα, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον· οἱ δ' ἀστρονόμοι τὰ μὲν ἄλλα παραλιμπάνουσι, τὰ δὲ δ λαμβάνουσι μόνον, τουτέστι ζώδια, μοίρας, λεπτὰ ἤτοι πρῶτα, ἅπερ ἀπροσδιορίστως λεπτὰ ὀνομάζουσι, καὶ δεύτερα, ἃ καὶ αὐτὰ, μὴ

*) Von hier an ist der Text ausserordentlich verdorben. Auch passt der Inhalt nicht zu dem Ergebniss der Division.

καὶ τὸ λεπτὰ προστιθέντες, προσφέρουσιν, ὡς νοουμένων ἔξωθεν ἐν μὲν τοῖς λεπτοῖς τοῦ πρῶτα, ἐν δὲ τοῖς δευτέροις τοῦ λεπτά.

Περὶ συνθέσεως.

Ἐπειδὰν τοίνυν μέλλεις ποιεῖν σύνθεσιν, ποίει ταύτην οὕτως· γράφε ζώδια, μοίρας, λεπτὰ καὶ δεύτερα, εἴ γε εὑρίσκεις πάντα ἐν τῷ ..... *) τῆς ἀστρονομίας, εἰ δ' οὐχ, ὅσα εὑρίσκεις· καὶ κάτωθεν τούτων γράφε τὸν ἀριθμὸν τῶν ζωδίων ἤτοι πόσα ζώδιά εἰσι, καὶ τῶν μοιρῶν κατὰ συστοιχίαν καὶ τῶν λεπτῶν ὡσαύτως καὶ τῶν δευτέρων. ἔστω δὲ διάγραμμα τόδε καὶ γενήσεται πρόδηλον ὅπερ λέγομεν· εἰπὲ τοίνυν ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ψήφου 9 καὶ ω, Ιϟ, καὶ 9, γμ, καὶ γ, γω· γράψον ω ἄνωθεν καὶ κράτει γ, ἅπερ ἑνώσας τῷ ἑξῆς ψήφῳ εἰπὲ γ καὶ γ, ϟ, καὶ γ, ч, καὶ ϟ, Ιο, καὶ ω, Ιω· σκόπει ποσάκις δύνῃ ἀφελεῖν ч ἀπὸ Ιω καὶ ἰδοὺ γ καὶ λοιπὰ μ· γράψον ἄνωθεν μὲν τῶν δευτέρων ἐπὶ τοῦ ω τὰ μ, τὰ δὲ γ κάτωθεν τοῦ ω τῶν λεπτῶν, καὶ εἰπὲ γ καὶ ω, ν, καὶ γ, 9, καὶ ϟ, Ιμ, καὶ ϟ, Ιν· γράψον ἄνωθεν τῶν ϟ, ν καὶ κράτει ἕν· καὶ πάλιν εἰπὲ Ι καὶ ϟ, ω, ω καὶ μ, λ, καὶ ω, Ιμ, καὶ ϟ, Ιν σκόπει πάλιν ποσάκις δύνῃ ἀφελεῖν ч καὶ ἰδοὺ γ, λοιπὰ ω· γράψον ω καὶ κράτει γ· καὶ ἐμβιβάσας ταῦτα ταῖς μοίραις εἰπὲ γ καὶ ϟ, ч, ч καὶ ω, ΙΙ, καὶ μ, Ιϟ, καὶ λ, γγ· γράψον γ καὶ κράτει γ, καὶ εἰπὲ γ καὶ Ι, μ, καὶ γ, ω, καὶ γ, ν, καὶ Ι, λ· σκόπει ποσάκις δύνῃ ἀφελεῖν γ̄ ἀπὸ τοῦ λ καὶ ἰδοὺ γ, λοιπὰ γ· γράψον γ καὶ κράτει γ, διὰ τὸ δίς τριάκοντα· καὶ πάλιν εἰπὲ γ καὶ Ι, μ, καὶ γ, ω, καὶ ϟ, 9, καὶ μ, Ιγ· ἄφελε ὅλα τὰ Ιγ καὶ κατελείφθη τζίφρα, καὶ εἰπὲ ὅτι ἐστὶν ἐν ταῖς γγ μοίραις καὶ ων λεπτοῖς καὶ μω δευτέροις τοῦ πρώτου ζωδίου τοῦ κριοῦ.

ζώδια	μοῖραι	λεπτὰ	δεύτερα
ο.	γγ.	ων.	μω
μ	Ιλ	ϟϟ	ωγ
ϟ	γμ	ωϟ	ϟ9
γ	γω	μγ	γω
Ι	Ιϟ	ϟω	γ9
γ	γγ	Ιγ	γ

Περὶ ἐκβολῆς.

Τὴν δὲ ἐκβολὴν ποίει οὕτως· ἔστω διάγραμμα τόδε καὶ ἄρξαι ἀπὸ τοῦ ἐλάτ-

*) ein unleserliches Wort.

τονος ἀριθμοῦ καὶ λέγε ϛ ἀπὸ τοῦ ω, ἐναπελείφθη ι· γράψον τοῦτο ἄνωθεν. ϛ ἀπὸ γ οὐ δυνατὸν ἀφελεῖν· δάνεισαι τῷ γ ἀπὸ τῶν ωλ μονάδα, ἥτις σημαίνει ϥο, καὶ ἐναπελείφθησαν ων· ἀντὶ τῶν ϥο γοῦν λάβε αὐτὸν ϥ καὶ εἰπὲ ϥ καὶ γ, λ· ἄφελε ϛ καὶ ἐναπελείφθησαν ϛ· καὶ γράψον αὐτὰ ἄνω τῶν γ. καὶ πάλιν εἰπὲ ν ἀπὸ ν,

ο.	γν.	μο.	ϛι
ιο.	γϛ.	ωλ.	γω
9.	γν.	γν.	ϛϛ

προαφήρηται γὰρ μονάδα, λοιπὴ τζίφρα· γράψον αὐτήν. καὶ πάλιν εἰπὲ γ ἀπὸ ω, ἐναπελείφθησαν μ· γράψον αὐτά. καὶ πάλιν εἰπὲ ν ἀπὸ ϛ, οὐ δυνατόν· δάνεισαι τοῖς ϛ, ι, ὅπερ σημαίνει ιο, καὶ εἰπὲ ν ἀπὸ ιϛ, ἐναπελείφθησαν ν· γράψον αὐτά, καὶ ὅπερ ἐδανείσω ι, ἕνωσον αὐτὸ τῷ κατωτέρῳ γ καὶ ἰδοὺ μ καὶ εἰπὲ μ ἀπὸ γ, οὐ δύνῃ· δάνεισαι αὐτῷ ἀπὸ τῶν ιο ἓν ἤτοι μοίρας μο καὶ λάβε αὐτά, ὡς μ καὶ εἰπὲ μ καὶ γ, ω· ἄφελε ἀπὸ τούτων μ, ἐναπελείφθησαν γ· γράψον αὐτά, καὶ εἰπὲ 9 ἀπὸ 9, ἀφῃρέθη γὰρ τὸ α, τζίφρα· γράψον αὐτήν.

Ἰστέον δὲ ὅτι ἐπειδὰν δανείζῃς μονάδα ἢ ἀπὸ λεπτῶν δευτέροις ἢ ἀπὸ μοιρῶν λεπτοῖς, ὡς ϥο λαμβάνεται ἡ μονάς, ἐπειδὰν δὲ ἀπὸ ζωδίων μοίραις ὡς μο, ἐπειδὰν δὲ ἢ ἀπὸ μοιρῶν μοίραις ἢ ἀπὸ λεπτῶν λεπτοῖς ἢ ἀπὸ δευτέρων δευτέροις ὡς ιο. ποιῶν δὲ τὴν δοκιμήν, συντίθει τὰ ἐναπολειφθέντα τῷ ἐλάττονι ψήφῳ ἵν' ἔχῃς τὸν μείζονα, καὶ λάβε οὕτως ϛ καὶ ι, ω· καὶ πάλιν δευτέρων σχημάτων ἐὰν ὦσιν ἐπέκεινα τῶν ξ, χρὴ ἀφαιρεῖν τὰ ϥ καὶ τὰ ἐναπολειφθέντα κατέχειν, εἰ δὲ ϥ μόνα, γράφειν τζίφραν καὶ κρατεῖν ἓν ἀντὶ τῶν ξ. εἰς δὲ τὰς μοίρας ἀφαιρεῖν δεῖ τρία ἐὰν ὦσιν ἐπέκεινα τούτων καὶ κατέχειν ἓν ἀντὶ τῶν τριῶν καὶ γράφειν τὰ ἐπέκεινα· εἰς δὲ τὰ ζώδια ἐὰν ὦσιν ἐπέκεινα τῶν δώδεκα, ἀφαιρεῖν ταῦτα καὶ τὰ ἐναπολειφθέντα γράφειν. ὅταν δὲ οὐ δύνῃ ἀφελεῖν ζώδια ἀπὸ τῶν ἄνωθεν ζωδίων, δάνεισαι αὐτοῖς ιγ ζώδια, ὥσπερ ἐποίεις εἰς τὰς μοίρας καὶ τὰ λεπτὰ καὶ τὰ δεύτερα, ταῖς μὲν δανείζων μ ἤτοι μο, ταῖς δὲ ϥ ἤτοι ϥο, καὶ ἄφελε καὶ τὰ ἐναπολειφθέντα γράψον. ὅταν δὲ μέλλεις ἀφελεῖν ἀπὸ ζωδίων καὶ μοιρῶν ζώδια καὶ μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα, γράψον ἄνωθεν ζώδια καὶ μοίρας καὶ δύο τζίφρας, καὶ κάτωθεν ζώδια καὶ μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα. καὶ ἔστω διάγραμμα τόδε· ἄφελε γοῦν ἀπὸ τῶν γϛ μοιρῶν ἓν καὶ δάνεισαι τοῦτο τῇ τζίφρᾳ τῇ ἐπεχούσῃ τὸν τόπον τῶν λεπτῶν· τὸ δὲ ι ἀντὶ τῶν ϥο λαμβάνομεν, ἡ γὰρ μοῖρα εἰς ϥο τέμνεται λεπτά· ἀπὸ τούτων δάνεισαι

ι	γϛ	ω	ιω
ιο.	γϛ.	ο.	ο.
λ.	γ9.	ωϛ.	ϛω.

πάλιν τῇ ἑτέρᾳ τζίφρᾳ τῇ ἐχούσῃ τὸν τόπον τῶν δευτέρων ἓν ὅπερ σημαίνει ϥο, καὶ ἕξεις καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα, τὰ μὲν ὄντα ω9, τὰ δὲ ϥο τὰ δεύτερα δηλονότι· καὶ εἰπὲ ʒω ἀπὸ ϥο, ἐναπελείφθησαν καὶ Iω, γράψον αὐτά· καὶ πάλιν [ωʒ ἀπὸ ω9, ἐναπελείφθησαν ω, γράψον αὐτά· καὶ εἰπὲ] 9 ἀπὸ ɯ, ἐδανείσω γὰρ τὸ I τῇ μετ' αὐτὸν τζίφρᾳ, οὐ δύνῃ· δάνεισαι αὐτῷ ἓν ὅπερ σημαίνει Io· Io γοῦν καὶ ɯ, Iɯ· ἄφελε 9, λοιπὰ ʒ· γράψον ταῦτα, καὶ ἑνώσας ἐδανείσω I, εἰπὲ I καὶ γ, ɯ· ɯ ἀπὸ γ οὐ δύνῃ· δάνεισαι αὐτῷ ɯ ἤτοι ɯo ἓν ζώδιον, καὶ εἰπὲ ɯ καὶ γ, ω· ἄφελε ɯ ἀπὸ τῶν ω καὶ γράψον γ· καὶ πάλιν εἰπὲ ʌ ἀπὸ 9, ἀφῃρέθη γὰρ τὸ I, ἐναπελείφθη I, γράψον αὐτό. ἐὰν δὲ βούλει ἀφελεῖν ἀπὸ τῶν ζωδίων μόνων ζώδια καὶ μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα, γράφε ἐφεξῆς τοῖς ζωδίοις τζίφρας ἐπεχούσας τοὺς τόπους τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ δευτέρων, καὶ δάνεισαι ἀπὸ τῶν ζωδίων ταῖς μοίραις ἓν ζώδιον ἤτοι τριάκοντα μοῖραι, καὶ πάλιν ἀπὸ τῶν μοιρῶν δάνεισαι τοῖς λεπτοῖς ἓν ὅπερ σημαίνει ἑξήκοντα, καὶ ἐναπελείφθησαν ἐν ταῖς μοίραις ω9, καὶ γράψον ἐν τοῖς λεπτοῖς ϥο, καὶ πάλιν δάνεισαι ἀπὸ τούτων τοῖς δευτέροις ἓν ὅπερ σημαίνει ϥο, καὶ ἐναπελείφθησαν ἐν μὲν τοῖς λεπτοῖς ω9, ἐν δὲ τοῖς δευτέροις ϥο. καθ' ἣν παραδεδώκαμεν μέθοδον ποίει τὴν ἐκβολήν. ταῦτα μὲν περὶ ἐκβολῆς.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Εἴπομεν δὲ καὶ περὶ πολλαπλασιασμοῦ. ἰστέον ὡς ἡνίκα ἂν πολλαπλασιασιάζῃς μοῖραν ἐπὶ μοῖραν, μοῖρα γίνεται ἀπὸ πολλαπλασιασμοῦ, μοῖραν δὲ ἐπὶ λεπτὰ γίνεται λεπτά, καὶ ἐπὶ δεύτερα δεύτερα, καὶ ἐπὶ τρίτα τρίτα, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσῃς λεπτὰ ἐπὶ λεπτά, γίνονται δεύτερα, ἐπὶ δὲ δεύτερα, γίνονται τρίτα· δεύτερα δὲ ἐπὶ δεύτερα, γίνονται τέταρτα, διὰ τὸ δύο καὶ δύο τέσσαρα. ὅταν δὲ μέλλῃς πολλαπλασιάζειν μοίρας καὶ λεπτὰ εἰς μοίρας καὶ λεπτά, πολλαπλασίαζε οὕτως, ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου διαγράμματος·

ɯ	γʌ	ωʒ	ʌ
	Iʒ	γɯ	
	ʌ	Iϥ	

εἰπὲ τοίνυν δεκάκις τὰ ʌ, ʌo, τετράκις τὰ ʌ, ɯγ· τὰ δε ʌo καὶ ɯγ εἰσὶ IIγ· καὶ πάλιν δεκάκις τὰ Io, Ioo, καὶ τετράκις τὰ ϥ, γʒ, καὶ δεκάκις τὰ ϥ, ϥo, καὶ τετράκις τὰ Io, ʒo· καὶ ὁμοῦ [γγʒ· καὶ πάλιν εἰκοσάκις τὰ ʌ, Iϥo, καὶ τρὶς τὰ ʌ, γʒ· καὶ ὁμοῦ] Iʌʒ· τὰ δὲ γγʒ καὶ Iʌʒ γίνονται ʒoʌ· καὶ πάλιν εἰκοσάκις τὰ Io, γoo, καὶ τρὶς τὰ Io, ɯo, καὶ εἰκοσάκις τὰ ϥ,

Ιγο, *καὶ τρὶς τὰ* ϥ. Ιλ. *καὶ ὁμοῦ* μϥλ· *ἴδε γοῦν ποσάκις δύνῃ ἀφελεῖν ἐξ αὐτῶν* ϥο, *καὶ ἔχεις* ϥ *λεπτά· ἐναπελείφθησαν καὶ* λ *δεύτερα· γράψον ταῦτα, καὶ ἐμβίβασον τὰ* ϥ *λεπτὰ τοῖς* ϛολ *λεπτοῖς, καὶ ἔχεις* ϛΙϛ· *πάλιν ἴδε ποσάκις δύνῃ ἀφελεῖν ἐξ αὐτῶν* ϥο, *καὶ ἔχεις* ϥ· *ἐναπελείφθησαν καὶ* ωϛ· *γράψον ταῦτα καὶ ἕνωσον τὰς* ϥ *μοίρας ταῖς* ΙΙγ *μοίραις. καὶ ἰδοὺ* ΙΙλ· *μέρισον οὖν ταύτας εἰς* μο *καὶ ἔχεις* μ· *ἐναπελεύφθησαν καὶ μοῖραι* γλ· *ἔχεις οὖν ζώδια* μ *μοίρας* γλ *λεπτὰ* ωϛ *καὶ δεύτερα* λ.

Περὶ μερισμοῦ.

Μερίζων δὲ μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα εἰς μοίρας καὶ λεπτὰ καὶ δεύτερα ποίει τὸν μερισμὸν οὕτως, καταντῶν δηλονότι εἰς ἓν γένος, ὥσπερ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ διαγράμματι, ὅπερ ἐκθέμενος εἰπὲ τρὶς ἑξήκοντα Ιλο· *ἰδοὺ ἐποίησας* $\overline{\gamma}$ *μοίρας λεπτά· ταῦτα ἕνωσον τοῖς* $\overline{\kappa\gamma}$ *λεπτοῖς· εἶτα ποίησον ὁμοῦ τὰ λεπτὰ πάντα δεύτερα καὶ ἕνωσον αὐτὰ τοῖς δευτέροις· ὅπως δὲ τοῦτο γίνεται, ἔστω γνώριμον διὰ τοῦ ὑποκειμένου διαγράμματος· γράψον κάτωθεν τὰ* γμ *λεπτὰ καὶ ἄνωθεν τὰ* Ιλο, *καὶ συντίθεις ταῦτα ἐκείνοις λέγε* μ *καὶ* ο, μ, γ *καὶ* λ, Ιο, *γράψον τζίφραν καὶ κράτει ἓν καὶ ἐμβιβάσας τοῦτο εἰπὲ* Ι *καὶ* Ι, γ· *γράψον ταῦτα καὶ πολλαπλασίασον ταῦτα ἐπὶ τῶν* ϥο *καὶ εἰπὲ τρὶς τὰ* ϥ, Ιλ, *γράψον τὰ* λ *καὶ κράτει ἕν· πάλιν ἑξάκις ἡ τζίφρα,* ο, *γράψον ὅπερ ἐκράτεις ἕν· καὶ πάλιν ἑξάκις τὰ* γ, Ιγ, *γράψον ὅλον καὶ σύνθες τούτῳ τὰ* ωϛ *δεύτερα. κατὰ δὲ τὴν αὐτὴν μεθόδον ποίησον καὶ ἐπὶ τῶν κάτω σχημάτων, τουτέστι ποίησον πάντα δεύτερα, καὶ μέρισον τὰ δεύτερα ἐπὶ τὰ δεύτερα, ἵνα γένωνται μοῖραι, ἐπεὶ καὶ τὰ δεύτερα πάλιν δεύτερα ποιεῖ ταῖς μοίραις πολλαπλασιαζόμενα· καὶ τὰς γενομένας μοίρας γράψας, τὰ ἐναπολειφθέντα δεύτερα ἀνάλυσον εἰς τρίτα, οἷον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος ὑποδείγματος ὁ πρῶτος στίχος ὁ* μ γμ ωϛ *ἀναλυθεὶς γέγονε δεύτερα* Ιγγμϛ, *ὁ δὲ δεύτερος ὁ* γ μϛ γϛ *ἀναλυθεὶς καὶ αὐτὸς εἰς δεύτερα γέγονε* 9γϥϛ. *μερίζω τὸν μείζονα ἐπὶ τὸν ἐλάττονα τουτέστι τὰ δεύτερα ἐπὶ τὰ δεύτερα καὶ εὑρίσκεται ἐκ τῆς παραβολῆς μονὰς* $\overline{\alpha}$ *περιττευ-*

μ γμ ωϛ γ μϛ γϛ	
Ιγγμϛ 9γϥϛ	Ι
γ9νο Ινλγοο 9γϥϛ	Ι9
γΙλϛ ΙμΙοϛο 9γϥϛ	Ιϛ

όντων καὶ γ9νο· λέγω δὲ γίνεσθαι μοῖραν μίαν. καὶ τὰ δεύτερα ἐπὶ τὰ δεύτερα ἐμερίσθη, καὶ τὰ δεύτερα ὑπὸ οὐδενὸς ἄλλου πολλαπλασιασθέντα δύναται πάλιν γενέσθαι δεύτερα, εἰ μὴ ὑπὸ τῶν μοιρῶν. τὰ δὲ περιττεύσαντα γ9νο ἀναλύω πάλιν εἰς ɥο καὶ τὰ γενόμενα ΙνΛγοο μερίζω παρὰ τὸν ἐλάττονα πάλιν τῶν δυοῖν προτέρων στίχων τουτέστι τρίτα ἐπὶ δεύτερα, καὶ γίνεται ἐκ τοῦ μερισμοῦ δέκα ἐννέα πρῶτα· τὰ γὰρ δεύτερα μετ' οὐδενὸς ἄλλου πολλαπλασιασθέντα γίνεται τρίτα, εἰ μὴ μετὰ τοῦ πρώτου, καὶ πάλιν τὰ $\overline{\gamma^{\alpha}}$ ἐπὶ τὰ δεύτερα πρῶτα ποιεῖ. γράφω τοίνυν τὰ Ι9 καὶ λέγω εἶναι αὐτὰ πρῶτα λεπτά. ἐκβληθέντος οὖν τοῦ ἐλάττονος στίχου ἐννεακαιδεκάκις ὑπὸ τοῦ ΙνΛγοο καταλιμπάνεται τρίτα γΙλ}, καὶ ἀναλύω αὖθις ταῦτα εἰς τέταρτα γινόμενα ΙɯΙο}ο. καὶ πάλιν μερίζω τὰ τέταρτα ἐπὶ τὰ πολλάκις εἰρημένα δεύτερα, καὶ ἐκ τῆς παραβολῆς γίνονται Ι}· ταῦτα λέγω δεύτερα καὶ γράφω αὐτά· δεύτερα δὲ εἶναι λέγω ταῦτα, ὅτε καὶ τὰ δεύτερα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πολλαπλασιασθέντα γίνεται τέταρτα, εἰ μὴ ὑπὸ δευτέρων, καὶ $\overline{\delta^{ον}}$ γοῦν ἐπὶ δεύτερον δεύτερον ποιεῖ. τούτῳ γοῦν τῷ τρόπῳ χρώμενος καὶ ἐπὶ τὸν ἑξῆς ποιῶ, καὶ τὰ ἐναπολειφθέντα τέταρτα ἀναλύω εἰς πέμπτα· μερίζω ταῦτα παρὰ τὰ δεύτερα καὶ ποιῶ τρίτα, ἐπεὶ καὶ τὰ $\overline{\gamma^{\alpha}}$ ἐπὶ τὰ δεύτερα πέμπτα ποιεῖ. καὶ πάλιν τὰ ἐναπολειφθέντα πέμπτα ἀναλύω εἰς ἕκτα, μερίζω ταῦτα παρὰ τὰ δεύτερα καὶ ποιῶ τέταρτα, ἐπεὶ καὶ τέταρτα ἐπὶ δεύτερα ἕκτα ποιεῖ. καὶ τοῦτο ποιῶ μέχρις οὗ βούλομαι· προχειρότερον μὲν οὖν ἐστι τὸ μέχρις ἂν ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ γένηται δεύτερα προβαίνειν, ἐντεχνότερον δὲ τὸ μέχρις ἂν ἕκτα· τὸ δ' ὑπὲρ ταῦτα περίεργόν τε καὶ ἄλλως περιττόν.

Ἰστέον μέντοι καὶ τοῦτο, ὡς ὅταν ἀναλύωμεν μοίρας εἰς λεπτά, ἐπὶ τοῦ ἑξήκοντα ποιοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅταν δὲ λεπτὰ εἰς δεύτερα καὶ δεύτερα εἰς τρίτα καὶ ἑξῆς οὐκ ἐπὶ τὸν ἑξήκοντα πάντως, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸν ἕξ, ἵνα μὴ σύγχυσιν ἡμῖν ἐν τοῖς διαγράμμασιν αἱ τζίφραι ποιῶσι πάντων πίπτουσαι, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος διαγράμματος, ἐπειδὴ πάντα διὰ τοῦ ἑξήκοντα ἀνελύσαμεν· εἰ δὲ διὰ τοῦ ἕξ τοῦτο γίνεται, ἐφ' ὧν μὲν μία τζίφρα πρὸς τῷ τέλει κεῖται, οὐδεμία πεσεῖται, ἐφ' ὧν δὲ δύο, μία. προσδιαληπτέον καὶ τοῦτο, ὅτι ἐλάττονα μὲν ἀριθμὸν λέγομεν τὸν τῶν πρώτων λεπτῶν, μείζονα δὲ τὸν τῶν δευτέρων, ἔτι δὲ μείζονα τὸν τῶν τρίτων καὶ ἐφεξῆς, εἰ καὶ δυνάμει τὸ ἀνάπαλίν εἰσι, καὶ μὲν τὰ πρῶτα τῶν δευτέρων, ταῦτα δὲ τῶν τρίτων καὶ ἐφεξῆς. ὅταν μὲν οὖν ὁ μείζων ἀριθμὸς μερίζεται παρ' ἐλάττονα, σκοπητέον τίς ἐπὶ τὸν ἐλάττονα πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ

τὸν μείζονα κἀκεῖνον λέγειν ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ γίνεσθαι, οἷον ἔστω μερίσαι ἕκτα παρὰ δεύτερα, σκοπῶ τὶς ἐπὶ τὰ δεύτερα πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τὰ ἕκτα καὶ εὑρίσκω τὸν τῶν τετάρτων, καὶ λέγω ὅτι τὰ ἕκτα παρὰ δεύτερα μεριζόμενα τέταρτα ποιεῖ· ὅταν δὲ ἴσος παρ' ἴσον μερίζηται, ἀεὶ μοίρας ποιεῖ, ἕκαστον γὰρ ἴσον ἑαυτῷ φυλάττουσιν αἱ μοῖραι πρὸς αὐτὰς πολλαπλασιαζόμεναι, οἷον ἔστω μερίσαι τέταρτα πρὸς τέταρτα, σκοπῶ τὶς ἐπὶ τὰ τέταρτα πολλαπλασιασθεὶς τέταρτα πάλιν αὐτὰ φυλάσσει, καὶ εὑρίσκω τὰς μοίρας, καὶ τοίνυν ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ μοίρας ἀποφαίνομαι εἶναι· ὡσαύτως καὶ πᾶς ἀριθμὸς, παρὰ μοίρας μεριζόμενος, αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς γίνεται, ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸν λόγον ὃν εἴπομεν καὶ ἡ μοῖρα ἐλάττων ἐστὶ παντὸς ἀριθμοῦ τῶν λεπτῶν πάντων εἴτε πρώτων εἴτε δευτέρων καὶ ἑξῆς, σκοπῶ τὶς μετὰ τοῦ ἐλάττονος ἤτοι τῆς μοίρας πολλαπλασιασθεὶς, ὡς ὅταν τρίτα λεπτὰ παρὰ μοίρας μερίζω, τὸν μείζονα ἤτοι τῶν τρίτων ποιεῖ, καὶ εὑρίσκω αὐτὰ τὰ τρίτα, καὶ τὰ ἐκ τοῦ μερισμοῦ τοίνυν τῶν τρίτων παρὰ τὰς μοίρας ἀποφαίνομαι τρίτα εἶναι. ἔστι δὲ καὶ ἄλλως εἰπεῖν· ἐπειδὰν μερίζῃς μείζονα ἀριθμὸν παρ' ἐλάττονα, ἀφαίρει τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος καὶ τὸν καταλιμπανόμενον ἐκεῖνον λέγε τὸν ἐκ τοῦ μερισμοῦ γινόμενον, οἷον εἰ βούλει μερίσαι τρίτα ἐπὶ δεύτερα, ἄφελε τὸν δύο ἀπὸ τοῦ τρία καὶ κατελείφθη ἕν· λέγε δὴ τὰ ἐκ τοῦ μερισμοῦ γίνεσθαι πρῶτα λεπτά. ὅταν δὲ ἴσον παρ' ἴσον, ἐπεὶ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἑτέρου τῶν ἀριθμῶν οὐδὲν καταλιμπάνεται, ἀνάγκη ἐστὶν ἀνατρέχειν εἰς τὰς μοίρας καὶ τὰ ἐκ τοῦ μερισμοῦ τούτων, ὡς τρίτων τυχὸν παρὰ τρίτα, λέγε μοίρας εἶναι. ὅταν δὲ ἀριθμόν τινα παρὰ μοίρας μερίζῃς, ἐπεὶ ἡ μοῖρα, εἰ καὶ δοκεῖ ἐλάττων εἶναι παντὸς ἀριθμοῦ, οὐκ ἔστι δὲ ἀριθμός· οἱ γὰρ ἀριθμοὶ ἀπὸ τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ δευτέρων καὶ ἑξῆς γίνονται κατὰ τὸ χύμα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, οὐ δέον ἀφαιρεθείσης τῆς μοίρας τὸ καταλιμπανόμενον παρὰ μονάδα γενέσθαι, οἷον εἰ τὰ τρίτα μερίζεις παρὰ μοίρας, οὐ δεῖ ἀφαιρεθείσης τῆς μοίρας τὸ ἐκ τοῦ μερισμοῦ γενέσθαι λεπτὰ δεύτερα, ἀλλ' αὖθις καὶ τρίτα μεῖναι· οὐδεὶς γὰρ ἐνταῦθα ἀριθμὸς ἀφῃρέθη, ἀλλὰ μοῖρα μόνη, ἡ δὲ μοῖρα οὐκ ἀριθμὸς, μονάδος γὰρ λόγον ἐπέχει.

Περὶ εὑρέσεως τετραγωνικῆς πλευρᾶς παντὸς ἀριθμοῦ.

Ἐπεὶ δὲ ὡς ἐν εἴδει *) περὶ τῶν συμβαλλομένων εἰς τὸν τῶν ἀστέρων ψῆφον

*) Vielleicht ist zu schreiben: ἐνείδες.

διελάβομεν, ἰτέον ἤδη περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν μὴ ἀληθῶς τετραγώνων διαλαβεῖν ἀριθμῶν, ἵνα δηλονότι δοθέντος οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου δυνατὸν εἴη εὑρεθῆναι τήντε τετραγωνικὴν τούτου πλευράν. προβαίνει δὲ καὶ τὰ περὶ τοῦδε τόνδε τὸν τρόπον· λάμβανε τὴν πλευρὰν τοῦ ἔγγιστα ἀληθοῦς τετραγώνου καὶ διπλασίαζε ταύτην· εἶτα ἀφαίρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ οὗ ζητεῖς τὴν πλευρὰν τὸν εὑρεθέντα ἔγγιστα τούτου τετράγωνον καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ὀνόμαζε τῷ ὀνόματι τοῦ ἀπὸ τοῦ διπλασιασμοῦ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ· οἷον εἰ μὲν ὀκτὼ εἴη ἡ διπλασίων τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, λέγε τὰ ἐναπολειφθέντα ὄγδοα, εἰ δὲ δέκα, δέκατα, καὶ ἑξῆς· οἷον ἔστω ὅτι βούλει τετραγωνίσαι τὸν ιΛ καὶ εὑρεῖν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, λαβὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἔγγιστα αὐτοῦ ἀληθοῦς τετραγώνου ἤτοι τοῦ ιϥ· ἡ δὲ ἐστιν ὁ ʒ· διπλασίασον ταύτην καὶ ἰδοὺ Λ, καὶ ἄφελε τὸν ιϥ ἀπὸ τοῦ ιΛ· ἐναπελείφθησαν γ· ὀνόμασον οὖν αὐτὰ ἀπὸ τοῦ Λ ὄγδοα· καὶ λέγε ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ιΛ ἐστὶν ʒ καὶ δύο ὄγδοα· τὰ δὲ δύο ὄγδοά εἰσι τέταρτον· καὶ ἐστιν ἡ πλευρὰ ʒ καὶ τέταρτον. ἵνα δὲ γνῶς ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν τρόπον, πολλαπλασίασον τὰ ʒ καὶ τέταρτον ἐφ' ἑαυτὰ καὶ εὑρίσκεις ἐξ αὐτῶν γινόμενον ὅλον τὸν ιΛ· καὶ ἔστω διάγραμμα τόδε· εἰπὲ γοῦν τετράκις τὰ ʒ, ιϥ, καὶ τετράκις τὰ δύο ὄγδοα ἤτοι τὸ ἓν τέταρτον τέσσαρα τέταρτα· τὰ δὲ τέσσαρα τέταρτά εἰσιν ἕν· καὶ πάλιν [τετράκις] τὰ δύο ὄγδοα ἕν· τὸ δὲ ἓν καὶ ἓν δύο· ἕνωσον ταῦτα τοῖς ιϥ, καὶ γίνονται ιΛ. ἀλλ' αὕτη μὲν ἡ μέθοδος ἁπλουστέρα τέ ἐστι καὶ ὁλοσχερεστέρα καὶ ἧττον ἀκριβείας μετέχουσα, οὐ δὲ γὰρ αὐτοῦ τῆς πλευρᾶς πρὸς ἑαυτὴν πολλαπλασιασμοῦ, εἰ καὶ ἔτι τέταρτον πρὸς ἑαυτὸ πολλαπλασιασθείη, ὁ ιΛ γίνεται μόνον, ἀλλ' ὁ ιΛ καὶ ἓν ἑξκαιδέκατον· τίς δὲ ἡ ἀκριβεστέρα καὶ μᾶλλον ἐχομένη τῆς ἀληθείας, ἧς ἡμετέραν θεοῦ νεύσει τὴν εὕρεσιν εἶναι λέγομεν, ἐν ὑστέροις εἰρήσεται· τέως δὲ τῆς παρούσης ἐχόμεθα, δεικνύντες αὐτὴν καὶ ἐπὶ πλειόνων ἀριθμῶν, ἵν' εὐκατανόητος μᾶλλον ἡμῖν γένηται. τὸν μὲν οὖν εἰρημένον τρόπον ποιοῦμεν ἀπὸ μονάδος μέχρι τῶν 99, ἀπὸ δὲ ἑκατὸν μέχρι τῶν 9999, ἐπειδὴ δύο χώρας δέχονται πᾶσαι αἱ πλευραὶ τῶν διὰ μέσου τούτων ἀριθμῶν, τῇδε τῇ μεθόδῳ χρηστέον. προκείσθω εὑρεῖν τοῦ γμϖ ἀριθμοῦ τὴν πλευρὰν καὶ διαγραφήτω ὁ ἀριθμός· εὑρὲ γοῦν ἀριθμόν, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν ἢ τέλεον δυνήσεται ἀνελεῖν τὸν δύο τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἢ ἔγγιστα αὐτοῦ γίνεσθαι· εἰ γοῦν πολλαπλα-

	ι	μ	
γ	μ	ϖ	
ι		ϖ	ιο
	γ	ιο	

σιάσεις τὸν γ, οὐ δυνατὸν, γίνεται γὰρ ϡ· τὸν δὲ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ ἴσον εἶναι δεῖ τῷ γ ἢ ἔγγιστα αὐτοῦ· πολλαπλασίασον οὖν τὸ ἓν ἐφ' ἑαυτὸ καὶ εἰπὲ ἓν ἐφ' ἓν πάλιν ἕν· ἄφελε τοῦτο ἀπὸ τοῦ γ, ἐναπελείφθη ἕν· γράψον τοῦτο μικρὸν ἀνωτέρω τοῦ μεταξὺ τοῦ γ καὶ μ, ὥσπερ ἐποίεις ἐπὶ τοῦ μερισμοῦ. διπλασίασον δὲ τὸ ἓν ὅπερ εὗρες εἰς ἀναίρεσιν τοῦ γ· τὸ ἓν δὲ λέγω τὸ ὡς πλευρὰν, ἀλλ' οὐχ ὡς τετράγωνον λαμβανόμενον. ὁ γὰρ εἰς ἀναίρεσιν εὑρισκόμενος ἀριθμὸς, ἐκεῖνος ὀφείλει διπλασιάζεσθαι· ἓν καὶ ἕν, δύο· γράψον ταῦτα τὰ δύο ὑπὸ τὸν μ, ὥστε μέντοι μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ στίχου κεῖσθαι τῇ προγραφείσῃ ὑπὸ τὸν γ μονάδι, ἀλλὰ κατωτέρω ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου στίχου, καὶ εὑρὲ ἀριθμὸν ὃς πολλαπλασιασθεὶς μὲν ἐπὶ τοῦτον ἀναιρήσει τὸν ιμ, ἐφ' ἑαυτὸν δὲ πολλαπλασιασθεὶς αὖθις τὸν λοιπόν· λέγω δὲ ἀναιρεῖν τὸν ιμ καὶ τὸν λοιπὸν ἢ τέλεον ἢ ἔγγιστα, οὕτω γὰρ ἀεὶ χρὴ τὴν ἀναίρεσιν ἐν τούτοις λαμβάνειν. δύναται μὲν οὖν ὁ ἓξ πρὸς μὲν τὰ δύο πολλαπλασιασθεὶς ἀναιρεῖν τὸν ιμ ἔγγιστα, ἀλλ' ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος γίνεται μείζων τοῦ καταλιμπανομένου ἀναιρεθῆναι· καταλιμπάνονται δὲ ιω, ὁ δὲ γίνεται μϥ· παρεὶς τοίνυν τὸν ϥ λάβε τὸν ω καὶ εἰπὲ πεντάκις τὰ γ, ιο· γράψον τὰ ω μεταξὺ τοῦ μ καὶ γ ἐπὶ τοῦ στίχου τῆς ὑπὸ τὸν γ γεγραμμένης μονάδος· ἐκβληθέντων δὲ τῶν ιο ἀπὸ τῶν ιμ, λοιπὰ μ· ταῦτα γράψον μικρὸν ἀνωτέρω τοῦ μεταξὺ τοῦ μ καὶ ω καὶ πολλαπλασίασον τὸν ω πάλιν ἐφ' ἑαυτὸν, ἵνα ἀνέλῃ τὸν μω, καὶ γίνεται γω, λοιπὰ ιο· ταῦτα γράψον ἔξω τοῦ στίχου κατ' ἰδίαν· εἶτα διπλασίασον τὸν ω, ὥσπερ καὶ τὴν ὑπὸ τὸν γ μονάδα καταρχὰς ἐδιπλασίασας, καὶ γίνονται ιο· ταῦτα γράψον ἐπὶ τοῦ τρίτου στίχου καὶ ἐφεξῆς τοῖς προγραφεῖσι δύο, εἶτα ἕνωσον τοῦ τρίτου στίχου τά τε γο καὶ τὰ ιο, τὰ γὰρ γ ἐπὶ δεκαδικοῦ κεῖνται τόπου, καὶ γίνονται μο, καὶ ἄφελε ἀπὸ τούτων τὰ ἡμίση καὶ γίνονται ιω, διπλῆν γὰρ εἶχεν ὁ μο τὴν πλευράν. ἔστι τοίνυν ἡ πλευρὰ τοῦ γμω, ιω καὶ δέκα τριακοστὰ, διπλασιασθείσης γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀληθῶς τετραγώνου, ὠνομάσθησαν τὰ ἐναπολειφθέντα ἀπὸ ταύτης τριακοστά· τὰ δὲ δέκα τριακοστά εἰσι τρίτον. ὅρα δὲ καὶ ὅπως ἡ πλευρὰ τοῦ ἀληθῶς τετραγώνου, τουτέστι τὰ ιω, κατὰ τὸν δεύτερον κεῖται στίχον, καὶ εἰ διπλασίων αὐτῆς, ὑπ' αὐτὴν κατὰ τὸν τρίτον. ποιῶν δὲ τὴν δοκιμὴν ποίει οὕτως· πολλαπλασίασον τὰ ιω ἐφ' ἑαυτά τε καὶ ἐπὶ τὰ δέκα τριακοστὰ καὶ εἰπὲ οὕτως· πεντεκαιδεκάκις τὰ ιω, γγω, πεντεκαιδεκάκις τὸ τρίτον, τοῦτο γάρ ἐστι τὰ δέκα τριακοστὰ, ω, καὶ ἔτι πεντεκαιδεκάκις τὸ τρίτον, ω· τὰ δὲ ω καὶ ω γίνονται ιο· σύνθες

ταῦτα τοῖς γγω καὶ γίνονται γμω. ἔτι δεικτέον, καὶ ἐφ' ὧν ἡ πλευρὰ τρεῖς χώρας ἐπέχει· τοῦτο δὲ γίνεται ἀπὸ 10000 μέχρις 999999· προκείσθω δὲ δεῖξαι τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν τοῦ ϛγ1μωϛ· ζητῶ τοίνυν ἐνταῦθα ἀριθμὸν οὐ τὸν ϛ μόνον ἀναιροῦντα πολλαπλασιαζόμενον ἐφ' ἑαυτὸν, ἀλλὰ τὸν ϛγ ἢ τέλεον ἢ ἔγγιστα· εὑρίσκω τοίνυν τὸν ϥ, καὶ ἀφαιρουμένων τῶν μϥ λοιπὰ ϥ· τὸν μὲν πολλαπλασιασθέντα ἕξ γράφω ὑπὸ τὸν γ, οὐ γὰρ ἀπὸ μόνου τοῦ ϛ ἀφῃρέθη, ἀλλ' ἀπὸ τῶν ϛγ ὁμοῦ ληφθέντων, τὰ δὲ καταλειφθέντα ϥ μεταξὺ τοῦ γ καὶ 1, καὶ διπλασιάσας τὸν ὑπὸ τὰ γ κείμενον ϥ ποιῶ 1γ, καὶ γράφω ταῦτα ὑπὸ τὸ 1 ἐν χώρᾳ τρίτου στίχου ὡς εἴρηται, καὶ σκοπῶ τίς ἐπὶ τὸν 1γ πολλαπλασιασθεὶς ἀναιρήσει τὸν ϥ1· εὑρίσκω τοίνυν τὸν ω *)· ἀπὸ τῶν μετὰ ταῦτα 1μ· παρεὶς τοίνυν τὸν ω λαμβάνω τὸν ϛ καὶ λέγω τετράκις τὰ 1γ, ϛΛ, λοιπὰ 1μ· τὰ μὲν ϛ γράφω μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1γ κατὰ τὸν δεύτερον στίχον, ἀφ' οὗ γὰρ ἀριθμοῦ ἀφαιρεῖται ἕκαστον τῶν τοῦ δευτέρου στίχου σχημάτων, ὑπ' ἐκεῖνον δεῖ τάττειν αὐτὸν· τὰ τοίνυν καταλειφθέντα 1μ συντιθέμενα τῷ μετὰ ταῦτα μ γίνεται 1μμ, καὶ ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν τὸν ϛ ἐφ' ἑαυτὸν γεγονότα, τουτέστι τὸν 1ϥ, λοιπὰ 11V· καὶ γράφω ταῦτα ἄνω τοῦ μ κατ' εὐθεῖαν· καὶ διπλασιάζω τὸν ϛ καὶ γίνεται Λ· γράφω ταῦα μετὰ τὰ 1γ ἐπὶ τοῦ γ στίχου· καὶ σκοπῶ τίς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 1γ ἀναιρήσει πρῶτον τὸν 11V, εἶτα ἐπὶ τὸν Λ τὸν μετὰ ταῦτα, καὶ ἔτι ἐφ' ἑαυτὸν τὸν τελευταῖον· εὑρίσκω γοῦν τὸν 9 καὶ λέγω ἐννεάκις τὰ 1γ, 10Λ, λοιπὰ 9· ταῦτα γράφω μεταξὺ τοῦ μ καὶ ω, τὰ δὲ πολλαπλασιασθέντα 9 ἐπὶ τὰ 1γ γράφω μεταξὺ τοῦ μ καὶ τοῦ Λ, καὶ αὖθις λέγω ἐννεάκις τὰ Λ, Vγ, λοιπὰ γμ· ταῦτα προστίθημι τοῖς ϛ καὶ γίνεται γμϛ, καὶ πάλιν λέγω ἐννεάκις τὰ 9, Λ1· ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν γμϛ, λοιπὰ 1ωμ· ταῦτα γράφω ἔξωθεν τοῦ πρώτου στίχου κατιδίαν, καὶ διπλασιάζω τὸν 9, γίνεται 1Λ· ταῦτα γράφω ἐφεξῆς τοῖς Λ ἐν τῷ τρίτῳ στίχῳ· καὶ συνάγεται ἡ πλευρὰ τοῦ ϛγ1μωϛ, ϥϛ9 καὶ ἕκατον πεντήκοντα γ χιλιοστοδιακοσιοστοενενηκοστόγδοα, τὰ γὰρ διπλασίονα τῶν ϥϛ9 τὰ 1γ9Λ εἰσί. ποτὲ δὲ ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν καταρχὰς ἀριθμὸς τὸν πρώτως

	ϥ	1γ	11V	9	γμ	
ϛ	γ	1	μ	ω	ϛ	
	ϥ	ϛ	9			1ωμ
		1γ	Λ	1Λ		

*) Hier ist im Text eine Lücke.

κείμενον μόνον ἀναιρεῖ, ποτὲ δὲ αὐτόν τε ὁμοῦ καὶ τὸν μετ' αὐτὸν, καὶ τὶς ἑκάστοτε πολλαπλασιάζεται, δείξομεν οὕτως συντόμως· εἰ μὲν περιτταί εἰσιν αἱ χῶραι τοῦ τετραγωνιζομένου ἀριθμοῦ, τὸν πρώτως κείμενον ἀριθμὸν δέον ἐστὶν ἀναιρεῖν. εἰ δὲ ἄρτιαι, τὸν δεύτερον ὁμοῦ σὺν πρώτῳ. ἰστέον οὖν ὡς εἰ μὲν μιᾶς, εἰ δύο χωρῶν ἐστιν ὁ ἀριθμός, οὗ ἡ πλευρὰ ζητεῖται, μιᾶς χώρας ἐστὶν ἡ πλευρά, εἰ δ' ἐκεῖνος τριῶν ἢ τεττάρων, αὕτη δύο, εἰ δὲ πέντε ἢ ἕξ, αὕτη τριῶν, εἰ δ' ἑπτὰ ἢ ὀκτὼ, τεττάρων, καὶ ἀεὶ οὕτως, δεῖ γὰρ τὰς χώρας τοῦ τετραγώνου ἢ διπλασίας θεῖναι ὑπὸ χωρῶν τῆς πλευρᾶς ἢ ἔγγιστα διπλασίας. ἀλλὰ *) γὰρ οὐκ ἄν τις ἡμᾶς μέμψαιτο, εἰ καὶ ταύτην τὴν μέθοδον ἡμέτερον εὕρημα φήσομεν εἶναι καὶ τὴν ἐφεξῆς ταύτῃ ῥηθησομένην, τουτέστι πῶς ἡ πλευρὰ τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐπειδὰν ἡ τοιαύτη πλευρὰ τέσσαρας χώρας ἐπέχῃ· εὑρίσκεται δὲ αὕτη τέσσαρας χώρας ἐπέχουσα ἀπὸ 1000000 μέχρις 100000000, ὥσπερ δὴ καὶ πέντε χώρας ἐπέχει 100000000 μέχρις 10000000000, καὶ αὖθις ἓξ ἀπὸ ρ̈ μέχρι α̈, καὶ ἑξῆς κατὰ τὸν λόγον τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων ἀριθμῶν· τέως δὲ λέγομεν περὶ ἀριθμοῦ οὗ καὶ ἡ πλευρὰ τέσσαρας χώρας ἐπέχει, τίνι μεθόδῳ χρησάμενοι αὐτὴν εὑρήσομεν. προκείσθω τοίνυν εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τοῦ 1ϥ9009ϥш· λέγω τοίνυν κατὰ τὴν προτέραν ἀρχόμενος μέθοδον τετράκις ϛ, 1ϥ· γράφω ὑπὸ τὸν ϥ τὰ ϛ· διπλασιάζω τοῦτον καὶ ἰδοὺ ʌ· γράφω τοῦτον καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ 9 ἅπαξ τὸν ʌ· γράφω τὸ ἅπαξ, λοιπὴ μονάς. γράφω ταύτην καὶ γίνεται 10, καὶ ἀφαιρῶ τὸ ἅπαξ ἐφ' ἑαυτὸ ἀπὸ τῶν 10, λοιπὰ 9· γράφω ταῦτα· διπλασιάζω τὸ ἅπαξ, γίνονται γ· καὶ ἔτι ἀφαιρῶ τὸν ʌ ἅπαξ ἀπὸ τῶν 9, γράφω τὸ ἅπαξ, λοιπὴ μονάς· γράφω ταύτην καὶ γίνεται 10· ἀφαιρῶ ἀπὸ τούτων ἅπαξ τὰ γ καὶ γίνεται ʌ· γράφω ταῦτα καὶ ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν ἔτι τὸ ἅπαξ ἐφ' ἑαυτό, λοιπὰ ν. ἔχομεν τοίνυν μέχρι τούτου τοῦ ν τὴν πλευρὰν ϛ11· ζητῶ τινὸς ἐπὶ ταῖς τρισὶ ταύταις χώραις προστεθέντος ἀριθμοῦ καὶ τῶν τεσσάρων ὁμοῦ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθεισῶν, ὁ γινόμενος ἐξ αὐτῶν ἔγγιστα ἥξει τοῦ 1ϥ9009ϥш· ἀλλὰ προστεθεὶς ὁ γ ὑπερβάλλεται τοῦτον· προσ-

1 9 1 ʌ v
1 ϥ 9 0 1 0 9 ϥ ш
ϛ 1 1 1 ϥϛγ
ʌ γ γ γ

*) Von hier an ist in der Feststellung des Textes das Bruchstück im Codex Gudianus des Diophant benutzt.

5

τίθημι τοίνυν τῷ ϛII *μονάδα καὶ γίνεται* ϛIII, *καὶ ὁ ἀπὸ τούτων* Iϥ9οοɰγI. *τοῦτον λέγω εἶναι τὸν ἔγγιστα τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ τετράγωνον· ὑπερέχει δὲ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, οὗ ἡ πλευρὰ δηλαδὴ ζητεῖται,* ϥϛγ *τοῦ εὑρεθέντος τετραγώνου, καὶ λέγω εἶναι τὴν πλευρὰν τοῦ* Iϥ9οο9ϥɰ, *διπλασιασθέντων τῶν* ϛIII, *καὶ* ϥϛγ *τετρακισχιλιοστοεκατοστο ια* *). *ὅπως δὲ καὶ ἡ προστιθεμένη τοῖς* ϛII *μονὰς ἀναιρεῖ τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμούς, γνωσόμεθα οὕτως· τοὺς ἀπὸ τοῦ* ν *καὶ αὐτοῦ, ἐφεξῆς ἀριθμοὺς τουτέστι τόν τε* ν *καὶ* 9 *καὶ* ϥ *καὶ* ɰ *ὡς μοναδικοὺς πάντας λαμβάνω, καὶ οὐκέτι ἑνῶν ἀλλήλους αὐτοὺς ποιῶ δεκαδικούς· συντιθεὶς τοίνυν τὸν* ν *καὶ* 9 *ποιῶ* Iϥ *καὶ λέγω ἅπαξ τὰ* λ, λ, *ἅπαξ τὰ* γ, γ, *λοιπὰ* ϥ· *καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ μετὰ τὸν* 9, ϥ *ἀφαιρῶ ἅπαξ τὰ* γ, *λοιπὰ* ϛ· *καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ* ɰ *ἀναιρῶ ἅπαξ τὸν* I, *λοιπὰ* γ· *καὶ συντιθεὶς τὰ λοιπὰ πάντα τουτέστι τὰ* ϥ *καὶ* ϛ *καὶ* γ *ποιῶ* ϥϛγ, *τὰ καὶ πρότερον εὑρεθέντα περιττά· ἐγένοντο δὲ ταῦτα* ϥϛγ *καὶ οὐ* Iγ *συντεθέντα, διὰ τὸ ἀφ' ἧς χώρας ἕκαστον ἀπελείφθη, πάλιν τὴν τῆς αὐτοῦ χώρας δύναμιν σώζειν.*

Ἔστω δὲ καὶ ἑτέρου ἀριθμοῦ παράδειγμα, οὗ καὶ ἡ πλευρὰ πέντε χώρας ἐπέχει καὶ ἔστω ἀριθμὸς ὁ Iϥ9οI9ϥνλ9· *λέγω τοίνυν τετράκις τὰ* ϛ, Iϥ· *γράφω ὑπὸ τὰ* ϥ *τὰ* ϛ *καὶ διπλασιάζω ταῦτα, καὶ λέγω ἅπαξ τὰ* λ, λ, *λοιπὰ* I· *γράφω τὸ ἅπαξ· γράφω καὶ τὸ λοιπὸν* I *καὶ γίνεται* Iο· *ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν τὸ ἅπαξ ἐφ' ἑαυτό, λοιπὰ* 9· *διπλασιάζω τὸ ἅπαξ, καὶ ἀφαιρῶ ἔτι ἀπὸ τῶν* 9 *ἅπαξ τὰ* λ, *λοιπὰ* I· *τοῦτο προστιθέμενον*

```
      I9I9λ  ϛ
  I ϥ 9 ο I 9 ϥ ν λ 9
    ϛ I I I I γ        γϛω
      λ γ γ γ ϛ
```

τῷ μετὰ τὴν τζίφραν I *γίνεται* II, *καὶ ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν ἅπαξ τὰ* γ, *λοιπὰ* 9, *καὶ ἔτι ἐξ αὐτοῦ τὸ ἅπαξ ἐφ' ἑαυτό, λοιπὰ* λ· *καὶ διπλασιάζω τὸ ἅπαξ· εἶτα λαμβάνω τὰ* λ *καὶ τοὺς λοιποὺς μέχρι τέλους ἀριθμοὺς πάντας μοναδικούς, καὶ συντιθεὶς τὸν* λ *καὶ* 9 *ποιῶ* Iν, *καὶ σκοπῶ τίς ἀριθμὸς ἀφαιρήσει ἐφ' ἑαυτὸν τόν τε* λ *καὶ τὸν* γ *καὶ [καὶ τὸν* γ *καὶ] ἑαυτὸν ἀπὸ τῶν* Iν *ἤτοι τοῦ* λ *καὶ* 9 *ἢ ἀπὸ ὅλου αὐτοῦ, μηδενὸς μέρους αὐτοῦ καταλειφθέντος, ἢ καὶ καταλειφθέντος τινός, εἰ καὶ μέρους τινὸς προσλειφθέντος ἐκ τοῦ μετὰ* 9 *τουτέστι τοῦ* ϥ· *ἀλλ' ὁ μὲν* γ *εἰ μέλλει ἀφαιρήσειν ἐφ' ἑαυτόν τε* λ *καὶ* γ *καὶ* γ *καὶ ἑαυτόν,* γλ *δεήσει μονάδων ἡμῖν· τὰ δὲ* γλ *ὑπερβαίνουσι τόν τε* λ *καὶ* 9 *καὶ*

*) Muss heissen: 8222stel.

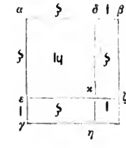
ч. λαμβάνω τοίνυν μονάδα· ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ Iv ἤτοι τοῦ ʌ καὶ 9 ἅπαξ τὰ ʌ καὶ γ καὶ γ καὶ τὴν μονάδα, λοιπὰ δὲ ϡ· ταῦτα γράφω· γράφω καὶ τὸ ἅπαξ καὶ διπλασιάζω αὐτὸ· καὶ σκοπῶ τίς ἔτι προστεθεὶς ἀριθμὸς τοῖς ϡIII καὶ πολλαπλασιασθέντων ὁμοῦ πάντων ἐφ' ἑαυτὰ ὁ ἔγγιστα τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ τετράγωνος γενήσεται, καὶ εὑρίσκω γ τὰ, ὧν προστεθέντων τοῖς ϡIII γένονται ϡIIIγ, καὶ ὁ ἀπ' αὐτῶν Iч9OI9чωϡϡ· ἀλλ' ὁ ζητούμενος ὑπερέχει τούτου γϡω, καὶ λέγω εἶναι τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου ϡIIIγ καὶ γϡω τετρακισμυριοστοχιλιοστοεκατοστοδωδέκατα.*) ὅπως δὲ ὁ εὑρεθεὶς γ ἀφαιρεῖ ἐφ' ἑαυτὸν τὸν ʌ καὶ γ καὶ γ καὶ ἔτι ἑαυτὸν ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, εἰσόμεθα οὕτως· συνθεὶς τὰ καταλειφθέντα τέσσαρα σὺν τοῖς ἐφεξῆς ч ποιῶ IO καὶ λαμβάνω μίαν ἀπὸ τῶν IO μονάδα, ποιῶ αὐτὴν IO, καὶ γίνονται ἔτι I9, καὶ ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῶν δὶς τὸν ʌ, λοιπὰ μ· ταῦτα συνθεὶς τῷ ἐφεξῆς v ποιῶ IO καὶ ἀφαιρῶ ἀπ' αὐτῶν δὶς τὰ γ καὶ δὶς γ, λοιπὰ γ· ἔτι ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ ἐφεξῆς ʌ δὶς τὰ γ, λοιπὰ ϡ, καὶ ἀπὸ τοῦ 9 τὰ γ ἐφ' ἑαυτὰ, λοιπὰ ω· καὶ ὁμοῦ λοιπὰ γϡω, ἃ καὶ ὑπερεῖχεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ εὑρεθέντος ἔγγιστα αὐτοῦ τετραγώνου. ἰστέον δὲ ὡς ὁ εὑρεθεὶς τῆς πλευρᾶς τελευταῖος ἀριθμὸς, ὡς ἐνταῦθα ὁ γ, ὀφείλει ἀεὶ ἐφ' ἑαυτὸν, ἵνα κατὰ ἀναποδισμὸν εἴπωμεν, ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου στίχου, ἐπὶ δὲ τὸν ὑπ' αὐτὸν ἐκ τοῦ παρεσχάτου, ἐπὶ δὲ τὸν παρέσχατον τοῦ ὑπ' αὐτὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου ἀπὸ τέλους τοῦ πρώτου στίχου, καὶ ἐφεξῆς οὕτως· οὐ μόνον δὲ ἐφ' ὧν ἡ πλευρὰ πέντε χώρας ἔχει τοῦτο γίνεται, ἀλλὰ καὶ ἐφ' ὧν τέσσαρας. ἔτι ἰστέον καὶ τοῦτο, ὡς ἀεὶ ὁ δεύτερος τοῦ δευτέρου στίχου ἐφ' ἑαυτόν, καὶ ὁ τρίτος τοῦ αὐτοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἤτοι ὁμοίου ἀριθμοῦ ἀφαιροῦνται· γίνεται δὲ τοῦτο ἐφ' ὧν ἡ πλευρὰ τρεῖς χώρας ἐπέχει· ἐφ' ὧν δὲ τέσσαρας καὶ πέντε καὶ ἐφεξῆς, τοῦτό τε γίνεται καὶ ἔτι ὁ τρίτος τοῦ δευτέρου ἐπί τε τὸν δεύτερον τοῦ τρίτου καὶ ἐφ' ἑαυτὸν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρεῖται, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ προλαβόντος θεωρήματος ὅτε τὸ I ἐπί τε τὸν γ καὶ ἐφ' ἑαυτὸν ἀπὸ τῶν II ἀφῃροῦμεν. ἀλλ' αὕτη μὲν ἡ μέθοδος ἁπλουστέρα τέ ἐστιν ὡς εἴρηται καὶ ὁλοσχερεστέρα.

Καιρὸς δὲ ἤδη λοιπὸν καὶ ἣν ἡμεῖς ἐφεύρομεν προθεῖναι μηδὲ κατὰ

---

*) Muss heissen: 82224stel.

μικρὸν τῆς ἀληθείας ἀποστατοῦσαν· ἀλλὰ πρὸ ταύτης ἀποδεικτέον ὅπως ἡ προλαβοῦσα μὴ πάνυ τι τῆς ἀκριβείας ἐφικνεῖσθαι ἱκανῶς ἔχει· δείξομεν δὲ τοῦτο καὶ δι᾽ ἀριθμῶν καὶ διὰ γραμμῶν, ἵνα μᾶλλον εὐκατανόητον γένηται· προκείσθω δὲ δεῖξαι τοῦτο ἐπὶ τοῦ γʒ· ἔστω δὴ δέον τὴν πλευρὰν τοῦ γʒ εὑρεῖν· λαμβάνω τὴν πλευρὰν τοῦ ἔγγιστα αὐτοῦ τετραγώνου τοῦ |ч, ἥτις ἐστὶ ʒ, καὶ διπλασιάσας ταύτην ποιῶ ʌ· καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ γʒ ὅλον τὸν |ч, καὶ κατελείφθησαν ʌ· καὶ λέγω εἶναι τὴν πλευρὰν τοῦ γʒ καὶ ὀκτὼ ὄγδοα· ἀλλὰ τὰ ὀκτὼ ὄγδοα ὅλη μονάς ἐστι μία· πολλαπλασιάζων δὲ τὰ ʒ καὶ τὰ ὀκτὼ ὄγδοα ἤτοι τὴν μονάδα ἐφ᾽ ἑαυτὰ εὑρίσκω οὐκέτι γʒ, ἀλλὰ γω, ὅσπερ τετράγωνος ἀληθής ἐστιν ἀπὸ τοῦ πεντάκις πέντε γινόμενος· ἐγὼ δὲ τὸν γʒ ἤθελον εὑρεῖν· ὅπως δὲ ὁ γω γίνεται, εὑρίσκω οὕτως· λέγω τετράκις τὰ ʒ, |ч· τετράκις τὰ ὀκτὼ ὄγδοα ἤτοι ἡ μονὰς, ʒ· καὶ αὖθις τετράκις ἡ μονὰς, ʒ· ἅπαξ τὸ |, |· ὁμοῦ γω· ἡ δὲ προλαβοῦσα μέθοδος τὸν μὲν ἄλλον πολλαπλασιασμὸν μετεχειρίζετο· τὸ δὲ | ἐπὶ τὸ | οὐκ ἐπολλαπλασίαζε, καὶ ἀληθεύειν ἐδόκει· δεῖ δὲ ἐξ ἅπαντος, καὶ τὸ | ἐπὶ τὸ |, πολλαπλασιάζεσθαι, εἰ μέλλοιμεν ἐντελῆ ποιεῖν τὸν πολλαπλασιασμόν. ἰστέον μέντοι ὡς ὁ μετὰ τὸν ἀληθῆ τετράγωνον εὐθὺς ἀριθμὸς ἐλαχίστῳ τινὶ γίνεται μείζων ἑαυτοῦ τῆς εὑρισκομένης αὐτοῦ πλευρᾶς ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης, ὁ δὲ μετ᾽ ἐκεῖνον μείζονι, καὶ ὁ μετ᾽ ἐκεῖνον ἔτι μείζονι, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς μέχρις ἂν μονάδι μείζων ἑαυτοῦ γένηται, καὶ οὐκέτι περαιτέρω προβαίνει· ἀλλὰ μετὰ τοῦτον εὐθὺς ἕτερος ἀληθὴς τετράγωνος εἴτ᾽ οὖν φύσει εὑρίσκεται, οἷον ὡς ἐπὶ ὑποδείγματος μετὰ τὸν |ч ὅς ἐστι φύσει τετράγωνος, ὁ |ν τῆς εὑρισκομένης αὐτοῦ κατὰ τήνδε τὴν μέθοδον πλευρᾶς ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης μείζων ἑαυτοῦ γίνεται ἑξηκοστοτετάρτῳ μονάδος, ὁ δὲ |ʌ ἑξκαιδεκάτῳ, ὁ δὲ |୨ ἑβδόμῳ καὶ ἑξηκοστοτετάρτῳ, ὁ δὲ γο τετάρτῳ, ὁ δὲ γ| τετάρτῳ ἑβδόμῳ καὶ ἑξηκοστοτετάρτῳ, ὁ δὲ γγ ἡμίσει καὶ ἑξκαιδεκάτῳ, ὁ δὲ γμ ἡμίσει τετάρτῳ καὶ ἑξηκοστοτετάρτῳ, ὁ δὲ γʒ ὅλῃ μονάδι μιᾷ, ὁ δὲ μετ᾽ αὐτὸν γω οὐκέτι τὴν αὐτὴν παραύξησιν δέχεται. ἀλλ᾽ αὐτός ἐστι φύσει τετράγωνος. διὰ μὲν οὖν ἀριθμῶν οὕτω τὸ προκείμενον ἀποδέδεικται· ἔστω δὲ δῆλον καὶ διὰ γραμμῶν· ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ἥτε $\overline{\alpha\beta}$ καὶ ἡ $\overline{\alpha\gamma}$, ἑκατέρα μονάδων τεσσάρων καὶ ὀκτὼ ὀγδόων, καὶ ἔστω ἐπὶ μὲν τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἡ μὲν $\overline{\alpha\delta}$ τῶν τεσσάρων



μονάδων, ἡ δὲ δβ τῶν ὀκτὼ ὀγδόων, ἐπὶ δὲ τῆς αγ ὁμοίως ἡ μὲν αε τῶν τεσσάρων μονάδων, ἡ δὲ εγ τῶν ὀκτὼ ὀγδόων· καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνον τὸ αθ, καὶ ἤχθω τῇ μὲν αβ παράλληλος ἡ εζ, τῇ δὲ αγ ἡ δη· δῆλον δὴ ὅτι τὸ εδ χωρίον τετράγωνόν ἐστιν ἀπὸ πλευρᾶς τοῦ ʒ, καὶ ἔστιν ὅλον |ϥ. ἐπεὶ δὲ τὰ ὀκτὼ ὄγδοά μοῖρά ἐστι μία, δῆλον ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν εγ, δβ μιᾶς μοίρας ἐστὶ πάλιν· ἐπεὶ μοῖρα ἐπὶ μοίρας πολλαπλασιαζομένη μοίρας ποιεῖ, δῆλον ὅτι ἑκάτερον τῶν γκ, κβ παραλληλογράμμων μοιρῶν ἔσται ʒ, τουτέστιν ὁμοῦ ʌ, ἐν ἑκατέρῳ γὰρ μία μοῖρα ἐπὶ τέσσαρας μοίρας ἐπολλαπλασιάσθη. ἔσται δὲ καὶ τὸ κθ τετράγωνον μιᾶς μοίρας, μοῖρα γὰρ μία ἡ δβ ἐπὶ μοῖραν μίαν τὴν εγ πολλαπλασιασθεῖσα μοῖραν μίαν ποιήσει· καὶ ἔσται ὅλον τὸ αθ τετράγωνον |ϥ καὶ ʌ καὶ |· ταῦτα δὲ ὁμοῦ συντεθέντα ποιεῖ γω. καὶ ταῦτα μὲν οὕτως.

Ῥητέον δὲ καὶ τὴν ἡμετέραν μέθοδον, ἡ δὲ καὶ ἔχει τόνδε τὸν τρόπον· θέλω εὑρεῖν, ὡς ἐν ὑποδείγματι, τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν τοῦ ϥ· ἀναλύω ταῦτα εἰς λεπτὰ δεύτερα καὶ γίνονται γ|ϥοο· καὶ ἐκτίθημι ταῦτα καὶ ζητῶ τὸν ἀναιροῦντα τὸν καταρχὰς ἀριθμόν· καὶ εὑρίσκω τὴν μονάδα, καὶ λέγω ἅπαξ τὸ ἕν |· γράφω τοῦτο ὑπὸ τὰ γ, λοιπὸν |· συντίθημι τοῦτο τῷ μετὰ ταῦτα |, γίνονται ||· διπλασιάζω τὴν ἀναιροῦσαν μονάδα καὶ τὰ γινόμενα δύο γράφω καθ᾽ ὃν τρόπον εἴρηται, οὐ γὰρ χρὴ τὰ αὐτὰ ἀεὶ λέγοντας ἐνοχλεῖν· καὶ ζητῶ τίς ἐπὶ μὲν τὸν γ ἀναιρήσει τὸν ||, ἐφ᾽ ἑαυτὸν δὲ τὸν λοιπόν, καὶ εὑρὼν τὸν ʒ λέγω τετράκις τὰ δύο ʌ, λοιπὰ ɰ· γράφω τὸν ʒ· καὶ συνθεὶς τὰ ɰ τῷ ἐφεξῆς ϥ ποιῶ ɰϥ, καὶ λέγω τετράκις τὰ ʒ, |ϥ, λοιπὰ γο· γράφω ταῦτα· καὶ διπλασιάσας τὸν ʒ ποιῶ ʌ καὶ ζητῶ τίς ἐπὶ μὲν τὸν γ ἀναιρήσει τὸν γο, ἐπὶ δὲ τὸν ʌ τὸν μετ᾽ αὐτὸν καὶ ἐφ᾽ ἑαυτὸν τὸν λοιπόν, καὶ εὑρίσκω τὸν ϥ, ἐγχωρεῖ μὲν γὰρ καὶ ὁ ν ἢ ὁ ʌ ἢ ὁ 9 ἀνελεῖν ἐπὶ τὸν γ τὸν γο· ἀλλ᾽ ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς οὐκέτι καὶ τούτους τούτων τις ἀνελεῖν δύναται· λαμβάνω τοίνυν τὸν ϥ καὶ λέγω ἑξάκις τὰ γ, |γ, λοιπὰ ʌ· ταῦτα συνθεὶς τῇ τζίφρᾳ ποιῶ ʌο, καὶ λέγω ἑξάκις τὰ ʌ, ʒʌ· ἀφαιρῶ ταῦτα ἀπὸ τῶν ʌο, λοιπὰ ɰγ· ταῦτα συνθεὶς τῇ λοιπῇ τζίφρᾳ ποιῶ ɰγο, καὶ πάλιν λέγω ἑξάκις τά ϥ, ɰϥ· ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ɰγο τὰ ɰϥ, λοιπὰ γʌʒ· καὶ διπλασιάζω τὸν ϥ καὶ γίνεται |γ· ἔχω τοίνυν τὴν πλευρὰν τοῦ ἔγγιστα τετραγώνου τῶν γ|ϥοο καὶ

	| ɰ γο ʌ ɰϥ
γ | ϥ ο ο	γ | ϥ ο ο
ɰ ϥ ο	| ʒ ϥ
ϥ	γ ʌ |γ

ἁπλῆν τὰ Ι>ч καὶ διπλῆν τὰ ϒ9ϒ· ὁ δὲ ἐκ τῆς ἁπλῆς γινόμενος τετράγωνός ἐστιν ὁ ϒΙωΙч, οἷς προστιθέμενα τὰ ϒλ> τὰ ϒΙчοο ποιεῖ. ἐπεὶ τοίνυν ἔχομεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἔγγιστα ὄντος τετραγώνου τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, γραμμικῶς ἡμῖν δεῖ τὸ ἐντεῦθεν τῆς δείξεως εἰ μέλλοιμεν εὐκατανόητον τοῖς ἐντυγχάνουσι τὴν διδασκαλίαν ποιεῖν· λαμβάνω τὴν ἁπλῆν πλευρὰν τὰ Ι>ч καὶ μερίζω αὐτὴν παρὰ τοῖς чο, καὶ γενόμενα ἐκ τοῦ μερισμοῦ λέγω μοίρας εἶναι καὶ λεπτὰ πρῶτα· γίνονται τοίνυν μοῖραι ϒ, λεπτὰ πρῶτα ϒч· καὶ ἐκτίθημι τὴν αβ γραμμὴν τῶν [τε] ϒ μοιρῶν οὖσαν καὶ τῶν ϒч πρώτων λεπτῶν, καὶ ἀναγράφω ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον τὸν αβγδ, καὶ τίθημι τὴν μὲν αε καὶ αζ ἑκατέραν τῶν ϒ μοιρῶν, ἑκατέραν δὲ τῶν εϑ καὶ ζγ τῶν ϒч πρώτων λεπτῶν, καὶ ἄγω παραλλήλους διὰ τοῦ ζ τῇ μὲν αβ τὴν ζϑ, διὰ δὲ τοῦ ε τῇ αγ τὴν εη, καὶ ἔστι τὸ μὲν αδ ὅλον τετράγωνον ὡς μὲν ἀπὸ λεπτῶν πρώτων Ι>ч, δευτέρων ϒΙωΙч, ὡς δὲ ἀπὸ μοιρῶν ϒ καὶ λεπτῶν πρώτων ϒч, μοιρῶν > καὶ λεπτῶν πρώτων μὲν Ιο>, δευτέρων δὲ чνч. τῶν γὰρ ἐν αὐτῷ τετραγώνων τε καὶ παραλληλογράμμων τὸ μὲν αχ τῶν > μοιρῶν ἐστιν, γέγονε γὰρ ἀπὸ τῆς αε ἐπὶ τὴν αζ τουτέστι τῶν μοιρῶν ἐφ᾽ ἑαυτάς· τῶν δὲ γχ καὶ χβ ἑκάτερον λεπτῶν πρώτων ωϒ ἤτοι συνάμφω Ιο>, γεγόνασι γὰρ ἀπό τε τῆς εβ πρὸς τὴν εχ τουτέστι τὴν αζ, καὶ τῆς ζγ πρὸς τὴν ζχ τουτέστι τὴν αε, τουτέστι ϒч πρώτων λεπτῶν ἐπὶ τὰς ϒ μοίρας· τὸ δὲ χδ δευτέρων чνч, γέγονε γὰρ ἀπὸ τῆς χϑ τουτέστι τῆς εβ ἐπὶ τὴν χη τουτέστι τὴν ζγ, τουτέστι τῶν ϒч πρώτων λεπτῶν ἐφ᾽ ἑαυτὰ ἅπαντα τουτέστιν αἱ συναγόμεναι > μοῖραι καὶ τὰ Ιο> πρῶτα λεπτὰ εἰς δεύτερα ἀναλυόμενα, προστιθεμένων αὐτοῖς καὶ τῶν чνч δευτέρων, τὰ πρότερα εὑρισκόμενα ϒΙωΙч δεύτερα γίνεται. τούτων οὕτω γενομένων, ἀναλύω τὰ ἐναπολειφθέντα μετὰ τὴν τῆς πλευρᾶς εὕρησιν ϒλ> δεύτερα εἰς Ινο>ο τρίτα καὶ λαμβάνω τὴν διπλῆν πλευρὰν ἥτις ἦν ϒ9ϒ πρώτων λεπτῶν, καὶ ζητῶ τίς ἀριθμὸς ἀποβαίνει ἐπὶ τὰ ϒ9ϒ μεριζομένων τῶν Ινο>ο, καὶ εὑρίσκω τὸν ωλ, πεντηκοντάκις γὰρ ὀκτὼ τὰ ϒ9ϒ, Ιч9ωч, λοιπὰ καὶ Ιο>· διάγω τοίνυν τὴν μὲν

αβ ἐπὶ τὸ λ, τὴν δὲ αγ ἐπὶ τὸ μ, καὶ τίθημι ἑκατέραν τῶν βλ, γμ ωλ δευτέρων λεπτῶν, ἐπεὶ καὶ τρίτα λεπτὰ μεριζόμενα παρὰ πρώτων δεύτερα ποιεῖ· καὶ ἄγω τῇ μὲν αλ ἴσην καὶ παράλληλον τὴν μν, τῇ δὲ αμ ἴσην ὁμοίως καὶ παράλληλον τὴν λν, καὶ διάγω τὴν μὲν εη ἐπὶ τὸ ξ, τὴν δὲ βδ ἐπὶ τὸ ο, τὴν δὲ γδ ἐπὶ τὸ π, καὶ τὴν ζθ ἐπὶ τὸ ρ· πολλαπλασιάζω τοίνυν τὴν μὲν βλ ἐπὶ τὴν βθ τουτέστι τὴν αζ, τὴν δὲ γμ ἐπὶ τὴν γη τουτέστι τὴν αε, τουτέστιν ἐν ἑκατέρῳ τα ωλ δεύτερα ἐπὶ τὰς γ μοίρας, καὶ γίνεται ἑκάτερον τῶν μη, θλ δευτέρων ΙΙϥ. πάλιν πολλαπλασιάζω τὴν μὲν θρ τουτέστι τὴν βλ ἐπὶ τὴν θδ τουτέστι τὴν ζγ, τὴν δὲ ηξ τουτέστι τὴν γμ ἐπὶ τὴν ηδ τουτέστι τὴν εβ, τουτέστιν ἐν ἑκατέρῳ τὰ ωλ δεύτερα ἐπὶ τὰ μϥ πρῶτα, καὶ γίνεται ἑκάτερον τῶν ξδ, δρ ΙωΟλ τρίτων· τὸ δὲ μη καὶ θλ ἀναλυόμενα εἰς τρίτα καὶ συντιθέμενα τοῖς τῶν ξδ καὶ δρ τρίτοις ποιεῖ τὰ μερισθέντα Ιϥ϶μϥ. ἐπεὶ δὲ ἐκ τοῦ μερισμοῦ ἐναπελείφθησαν καὶ τρίτα Ιο϶, πάλιν πολλαπλασιάζω τὴν δπ τουτέστι τὴν βλ ἐπὶ τὴν δο τουτέστι τὴν γμ, τουτέστι τὰ ωλ δεύτερα ἐφ᾽ ἑαυτὰ καὶ γίνεται τὸ οπ μωϥ϶ τετάρτων· ὧν ἀφαιρεθέντων ἐκ τῶν ἐναπολειφθέντων ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ Ιο϶ τρίτων λοιπὰ τρίτα μὲν ϡν, τέταρτα δὲ ωϥ, ἃ δὴ καὶ παραθεωροῦνται διὰ τὸ καὶ ἑνὸς δευτέρου ἐλάσσονα εἶναι καὶ διὰ τὸ μηδέποτε δύνατον εἶναι ἐπὶ τῶν μὴ φύσει τετραγώνων ἀριθμῶν μηδὲν καταλιμπάνεσθαι, κἂν τὰ καταλειφθέντα, λεπτὰ εἰς τὰ ἐλάττονα αὐτῶν καὶ ἐφεξῆς αὐτοῖς ἀναλύωμεν καὶ τάς τε παραβολὰς καὶ πολλαπλασιασμοὺς εἰς ἀεὶ ποιῶμεν. συνάγεται δὴ κατὰ τόνδε τὸν τετραγωνισμὸν ἡ τοῦ ϥ πλευρὰ μονάδων γ λεπτῶν πρώτων μϥ καὶ δευτέρων ωλ. ἵνα δὲ δῆλον γένηται ὅτι ἀεί τι καταλιμπάνεται ἐν τοῖς μὴ φύσει τετραγώνοις ἀριθμοῖς καὶ δὴ καὶ εἴ τις περιεργότερός ἐστιν εἰ δεῖ ἐπὶ πλέον τὴν οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ πλευρὰν προάγειν, ὡς καὶ τρίτων λεπτῶν αὐτὴν εἶναι, ποιῶ οὕτως· ἐκτίθημι πάλιν ὅλον τὸ γεγονὸς διάγραμμα καὶ ἀναλύω τὰ καταλειφθέντα ϡν τρίτα καὶ ωϥ τέταρτα εἰς τέταρτα καὶ γίνονται τέταρτα ὁμοῦ γλνϥ· καὶ λαβὼν αὖθις τὴν διπλῆν πλευρὰν τουτέστι τὰ γ϶γ ζητῶ πάλιν τίς ἀριθμὸς ἀποβαίνει παρὰ τὰ γ϶γ μεριζομένων τῶν γλνϥ, καὶ εὑρίσκω τὸν ϶· ἐννεάκις γὰρ τὰρ γ϶γ, γϥγλ· ἐναπελείφθησαν καὶ γϡλ· διάγω τοίνυν τὴν μὲν αλ ἐπὶ τὸ σ, τὴν δὲ αμ ἐπὶ τὸ $β_1$, καὶ τίθημι ἑκατέραν τῶν λσ, $μβ_1$ ἐννέα τρίτων, τὰ γὰρ τέταρτα παρὰ τὰ πρῶτα μεριζόμενα τρίτα ποιεῖ· καὶ ἄγω παραλλήλους καὶ ἴσας τῇ μὲν ασ τὴν $β_1χ$, τῇ δὲ $αβ_1$, τὴν σχ, καὶ διάγω τὴν



$\overline{\zeta\varrho}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\tau}$, τὴν δὲ $\overline{\gamma\pi}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\upsilon}$, τὴν δὲ $\overline{\mu\nu}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\varphi}$, καὶ ἔτι τὴν μὲν $\overline{\varepsilon\xi}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\alpha_1}$, τὴν δὲ $\overline{\beta o}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\omega}$, τὴν δὲ $\overline{\lambda\nu}$ ἐπὶ τὸ $\overline{\psi}$· καὶ πολλαπλασιάζω τὴν μὲν $\overline{\lambda\sigma}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\lambda\varrho}$ τουτέστι τὴν $\overline{\alpha\zeta}$, τὴν δὲ $\overline{\mu\beta_1}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\mu\xi}$ τουτέστι τὴν $\overline{\alpha\varepsilon}$, τουτέστιν ἐν ἑκατέρῳ τὰ 9 τρίτα ἐπὶ τὰς γ μοίρας, καὶ γίνεται ἑκάτερον τῶν $\overline{\beta_1\xi}$, $\overline{\varrho\sigma}$ ιλ τρίτων· πάλιν πολλαπλασιάζω τὴν μὲν $\overline{\tau\varrho}$ τουτέστι τὴν $\overline{\lambda\sigma}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\varrho\pi}$ τουτέστι τὴν $\overline{\zeta\gamma}$, τὴν δὲ $\overline{\alpha_1\xi}$ τουτέστι $\overline{\mu\beta_1}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\xi o}$ τουτέστι τὴν $\overline{\varepsilon\beta}$, τουτέστιν ὡς ἑκατέρωθεν τὰ 9 τρίτα ἐπὶ τὰ γϥ πρῶτα, καὶ γίνεται ἑκάτερον τῶν $\overline{\alpha_1 o}$, $\overline{\pi\tau}$ γμϛ τετάρτων· τὰ δὲ $\overline{\beta_1\xi}$, $\overline{\varrho\sigma}$ ἀναλυθέντα εἰς τέταρτα καὶ συντεθέντα ὁμοῦ τοῖς τῶν $\overline{\alpha_1 o}$ καὶ $\overline{\pi\tau}$ τετάρτοις ποιεῖ τὰ μερισθέντα γϥγλ τέταρτα· ἐπεὶ δὲ ἐκ τοῦ μερισμοῦ πάλιν ἐναπελείφθησαν γϛλ τέταρτα, πάλιν πολλαπλασιάζω τὴν μὲν $\overline{\pi\upsilon}$ τουτέστι τὴν $\overline{\lambda\sigma}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\pi\nu}$ τουτέστι τὴν $\overline{\gamma\mu}$, τὴν δὲ $\overline{o\omega}$ τουτέστι τὴν $\overline{\mu\beta_1}$ ἐπὶ τὴν $\overline{o\nu}$ τουτέστι $\overline{\beta\lambda}$, τουτέστιν ἐν ἑκατέρῳ τὰ 9 τρίτα ἐπὶ τὰ ωλ δεύτερα, καὶ γίνεται ἑκάτερον τῶν $\overline{\omega\nu}$, $\overline{\nu\upsilon}$ ωγγ πέμπτων· πάλιν πολλαπλασιάζω τὴν $\overline{\nu\varphi}$ τουτέστι τὴν $\overline{\lambda\sigma}$ ἐπὶ τὴν $\overline{\nu\psi}$ τουτέστι τὴν $\overline{\mu\beta_1}$, τουτέστι τὰ 9 τρίτα ἐφ᾽ ἑαυτά, καὶ γίνεται τὸ $\overline{\psi\varphi}$ λι ἕκτων· τὰ δὲ τῶν $\overline{\omega\nu}$ καὶ $\overline{\nu\upsilon}$ πέμπτα καὶ τὰ τοῦ $\overline{\psi\varphi}$ ἕκτα γίνονται τέταρτα μὲν ιν, πέμπτα δὲ γῶ, ἕκτα δὲ γι· ὧν ἀφαιρεθέντων ἐκ τῶν ἐναπολειφθέντων ἐκ τοῦ μερισμοῦ γϛλ λοιπὰ μένει γμο τέταρτα καὶ μϛ πέμπτα καὶ ἕκτα μ9, ἅπερ ἐλάττονά ἐστι τρίτων ϛ. ὅρα τοίνυν ὅπως εἰ καὶ ἔλαττον ἐνταῦθα ἢ ἐν τῷ προλαβόντι τετραγωνισμῷ ἐναπελείφθη, ἀλλ᾽ ὁμοῦ ἐναπελείφθη τί, κἀκεῖ μὲν δύο εἰδῶν

ἐναπελείφθη λεπτὰ, τρίτα λέγω καὶ τέταρτα, ἐνταῦθα δὲ τριῶν, τέταρτα λέγω καὶ πέμπτα καὶ ἕκτα. εἰ δὲ καὶ ἐπέκεινα τούτων προβαίνειν τις βουληθείη, συγχύσεως μὲν ἀναπλησθήσεται· ποιήσει δὲ πλέον οὐδὲν, ἀεὶ γὰρ ἐναπολειφθήσεταί τι, καὶ τοῦτο δὴ τὸ ἀπολιμπανόμενον πλειόνων καὶ πλειόνων εἰδῶν ἀεὶ γενήσεται. ἐπεὶ δὲ ἔχομεν κατὰ μὲν τὸν πρότερον τετραγωνισμὸν τὴν πλευρὰν τοῦ ϥ μοιρῶν γ πρώτων λεπτῶν γϥ καὶ δευτέρων ωʌ, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον ἔτι καὶ τρίτων 9, πολλαπλαστέον καὶ ἐν ἑκατέρῳ τὰς πλευρὰς ἐφ᾽ ἑαυτὰς, καὶ δειχθήσεται ὅπως ἐντεῦθεν ὁ ϥ ἔγγιστα συνάγεται· καὶ πρῶτον ἐκκείσθω ἡ προτέρα πλευρὰ κατὰ τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μέθοδον ἥτις ἦν ἡ πλευρὰ δηλαδὴ μοιρῶν γ λεπτῶν πρώτων γϥ καὶ δευτέρων ωʌ. ποιῶ πρῶτον τὰ ωʌ δεύτερα ἅπαξ ἐφ᾽ ἑαυτὰ, γίνονται μμϥϛ τέταρτα, ἅπερ ἐστὶ τὸ οπ· εἶτα τὰ ωʌ δεύτερα ἐπὶ τὰ γϥ πρῶτα λεπτὰ δὶς καὶ γίνονται μoıϥ τρίτα, ἅπερ ἐστὶ συνάμφω τά τε ξδ καὶ δρ· εἶτα τὰ ωʌ δεύτερα ἐπὶ τὰς μοίρας δὶς καὶ τὰ γϥ πρῶτα ἐφ᾽ ἑαυτὰ ἅπαξ καὶ γίνονται 9oʌ δεύτερα, ἅπερ ἐστὶ τό τε μη καὶ ηθ καὶ θλ· εἶτα τὰ γϥ πρῶτα ἐπὶ τὰς γ μοίρας δὶς καὶ γίνονται ıoϛ πρῶτα, ἅπερ ἐστὶ συνάμφω γκ καὶ κβ· εἶτα τὰς γ μοίρας ἐφ᾽ ἑαυτὰς ἅπαξ καὶ γίνονται μοῖραι ϛ, αἵπερ εἰσὶ τὸ ξε· καὶ μετὰ τοῦτο ἀρξάμενος ἀπὸ τῶν τετάρτων λεπτῶν ἅπερ εἰσὶ μμϥϛ μερίζω ταῦτα παρὰ τὸν ϥo καὶ γίνονται τρίτα ωϥ τέταρτα ϛ· ταῦτα τὰ ωϥ τρίτα συντίθημι τοῖς μoıϥ τρίτοις καὶ γίνονται μoνγ, καὶ μερίζω ταῦτα παρὰ τὸν ϥo καὶ γίνονται δεύτερα ωı τρίτα ıγ· ταῦτα τὰ ωı πάλιν δεύτερα συντίθημι τοῖς 9oʌ δευτέροις καὶ γίνονται 9ω9, καὶ μερίζω ταῦτα παρὰ τὸν ϥo καὶ γίνονται πρῶτα ıω δεύτερα ω9· ταῦτα τὰ πρῶτα ıω συντίθημι τοῖς ıoϛ πρώτοις καὶ γίνονται ıı9· ταῦτα μερίζω παρὰ τὸν ϥo καὶ γίνονται μοῖραι γ παρὰ λεπτὸν πρῶτον ı· ταύτας τὰς γ μοίρας συντίθημι ταῖς ϛ μοίραις καὶ γίνονται ϥ, ὁ ἐξ ἀρχῆς δηλαδὴ ἀριθμὸς, οὗ τὴν πλευρὰν ἐζητοῦμεν *). ἰστέον ὡς ἐπὶ τῆς τοιαύτης συναγωγῆς τῶν λεπτῶν ἀείποτε πρῶτον παρ᾽ ἓν

		ω9	ıγ	ϛ
γ	ıω	ωı	ωϥ	
ϛ	ıoϛ	9oʌ	μoıϥ	μμϥϛ
γ	γϥ	ωʌ		
γ	γϥ	ωʌ		

*) Die folgende Stelle bis zu den Worten: ὃ δὲ εἴπομεν λείπειν λεπτὸν πρῶτον ἐν ταῖς δυσὶ μοίραις, fehlt im codex Gudianus.

λεπτὸν συνάγεται, οὐχὶ τοῦ ἑνὸς πρώτου παντάπασι λείποντος, ἀλλὰ δευτέρου ἑνὸς ἢ καὶ δύο, ὧν ἐκ τῶν τριῶν ἀναπληρουμένων τηνικαῦτα καὶ τὰ πρῶτα ἀπαρτίζεται· τοῦτο δὲ συμβαίνει διὰ τὸ κατὰ τὴν παραβολὴν τῶν τρίτων λεπτῶν μὴ δύνασθαι ἀπαραλείπτως πάντα τὰ τοιαῦτα τρίτα λεπτὰ παραβάλλεσθαι, ἀλλὰ καταλιμπάνεσθαί τινα ἐξ αὐτῶν ἐλάττονα εὑρισκόμενα τοῦ μήκους πρὸς ὃ παραβάλλεται· εἰ δὲ ἐπὶ τῆς ἁπλῆς πλευρᾶς καὶ ἕτερον ἓν προσθείημεν λεπτὸν δεύτερον, εἶτα πολλαπλασιάσαι μετ' αὐτήν, οὐ μόνον ἐντελῆ τὰ πρῶτα λεπτὰ εὑρεθήσεται, ἀλλὰ καὶ τρίτα καὶ τέταρτα περιττεύσει. οὐ μὴν οὕτω ποιεῖν δεῖ· βέλτιον γὰρ τετραγωνίζοντα καταλιμπάνειν τινὰ τῶν τρίτων λεπτῶν ἢ ἔξωθεν ἕτερα προσλαμβάνειν· ὁ μὲν γὰρ προσλαμβάνων ἀναγκάζει τὴν τοῦ τετραγώνου χώραν πλείονα, ἢ φύσιν ἔχει δέχεσθαι, δέξασθαι, ὅπερ οὐδέποτ' ἂν οὐδεμιᾷ γένοιτο μηχανῇ· ὁ δὲ παραλιμπάνων οὐ δίδωσιν ἔτι χώραν τῷ βουλομένῳ εἰς τέταρτα ταύτην καὶ πέμπτα, καὶ μετρεῖν οὐ βούλεται ἀναλύειν, καὶ προσπεριβάλλειν τῷ τετραγώνῳ γνώμονας, οὓς ἡμεῖς διὰ τὸ μηδὲν αἰσθητὸν παρέχειν παρήκαμεν· εἰ δ' ἴσως καὶ τῶν συναγομένων τοῦτον τὸν τρόπον μοιρῶν λέγω καὶ λεπτῶν, ὡς ἐνταῦθα τῶν ιω΄ ωϙ΄΄ ιγ΄΄΄ θελήσει τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν, οὐδὲν ἧττόν φημι καὶ αὖθις, τὰ γ΄ μϙ΄΄ ωλ΄΄΄ εὑρίσκεσθαι τὴν τοῦ ἓξ πλευρὰν, διὰ τὸ ἓν δεύτερον, ὅπερ ἐνδεῖ πρὸς ἀπαρτισμὸν τῶν ἓξ μοιρῶν, μηδεμίαν παραλογὴν ἐμποιεῖ. ἀπὸ μὲν οὖν τῆς πλευρᾶς τὸν τετράγωνον εὑρίσκοντες οὐδὲν παραλιμπάνομεν, ἀπὸ δὲ τοῦ τετραγωνιζομένου τὴν πλευρὰν εὑρίσκοντες παραλιμπάνομεν ὡς εἴρηται τρίτα λεπτὸ, ὥστε οὐ χρὴ θαυμάζειν εἰ ἀπὸ μὲν τοῦ ἀριθμοῦ τὴν πλευρὰν εὑρίσκοντες, ἀπὸ δὲ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς αὖθις τὸν ἀριθμὸν ζητοῦντες οὐ τοσοῦτον εὑρίσκομεν ὅσον προυποθέμεθα, ἀλλὰ παρ' ἓν ἢ δύο δεύτερα λεπτὰ, ἡ γὰρ αἰτία εἴρηται, ὥστε εἰ βούλεταί τις ἀεὶ τῇ εὑρισκομένῃ πλευρᾷ ἓν δεύτερον λεπτὸν προστιθέναι, πάλιν ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τὸν αὐτὸν εὑρήσει ἀριθμόν. ὃ δὲ εἴπομεν λείπειν λεπτὸν πρῶτον ἐν ταῖς δυσὶ μοίραις, οὐ παντάπασι λείπει, ἀλλ' ἔχομεν ωϙ δεύτερα ἀντ' αὐτοῦ, ἃ παρ' ἓν πάλιν δεύτερον ἓν πρῶτον εἰσιν· ἀντὶ δὲ τοῦ λείποντος πάλιν ἑνὸς δευτέρου ἔχομεν ιγ τρίτα καὶ τέταρτα ϛ. ἐκκείσθω δὲ καὶ ἡ κατὰ τὸν δεύτερον τετραγωνισμὸν εὑρεθεῖσα πλευρὰ ἥτις ἦν μοιρῶν δύο λεπτῶν πρώτων μϙ δευτέρων ωλ καὶ τρίτων ϙ· ποιῶ πρῶτον τὰ ϙ τρίτα ἐφ' ἑαυτὰ ἅπαξ καὶ γίνονται λι ἕκτα, ἅπερ εἰσὶ τὸ ψφ· εἶτα τὰ ϙ τρίτα ἐπὶ τὰ ωλ δεύτερα δὶς καὶ γίνονται ιοϛϛ, ἅπερ εἰσὶ τὰ ων, νυ πέμπτα ὄντα· εἶτα ποιῶ

		ω9	ωч	9	γω	μl
γ	lω	ωl	ч$	lv	l	
$	lo$	9oλ	μoωγ	μλμч	lo$$	λl
γ	μч	ωλ	9			
γ	μч	ωλ	9			

τὰ 9 τρίτα ἐπὶ τὰ μч πρῶτα δὶς καὶ τὰ ωλ δεύτερα ἅπαξ ἐφ' ἑαυτὰ καὶ γίνονται μλμγ τέταρτα, ἅπερ εἰσὶ τὰ α,ο, οπ, πτ· εἶτα ποιῶ τὰ 9 τρίτα ἐπὶ τὰς γ μοίρας δὶς καὶ τὰ ωλ δεύτερα ἐπὶ τὰ μч πρῶτα δὶς καὶ γίνονται μoωγ τρίτα, ἅπερ εἰσὶ τὰ β_1ξ, ξδ, δρ, ρσ· εἶτα ποιῶ τὰ ωλ δεύτερα ἐπὶ τὰς γ μοίρας δὶς καὶ τὰ μч πρῶτα ἐφ' ἑαυτὰ ἅπαξ καὶ γίνονται 9oλ, ἅπερ εἰσὶ τὰ μη, ηϑ, ϑλ· εἶτα ποιῶ τὰ μч πρῶτα ἐπὶ τὰς γ μοίρας δὶς καὶ γίνονται lo$ πρῶτα, ἅπερ εἰσὶ τὰ γκ, κβ· εἶτα τὰς γ μοίρας ἅπαξ ἐφ' ἑαυτὰς καὶ γίνονται $, αἵπερ εἰσὶ τὸ ζε. μετὰ τοῦτο ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἕκτων λεπτῶν, ἅπερ εἰσὶ λl, μερίζω ταῦτα παρὰ τὸν чo καὶ γίνεται πέμπτον ἓν ἕκτα μl· τὸ ἓν πέμπτον συντίθημι τοῖς lo$$ πέμπτοις καὶ γίνονται lo$ω· ταῦτα μερίζω παρὰ τὸν чo καὶ γίνονται lv τέταρτα καὶ πέμπτα γω· ταῦτα τὰ lv τέταρτα συντίθημι τοῖς μλμγ τετάρτοις καὶ γίνονται μλ$9. ταῦτα μερίζω παρὰ τὸν чo καὶ γίνονται ч$ τρίτα 9 τέταρτα· ταῦτα τὰ ч$ τρίτα συντίθημι τοῖς μoωγ τρίτοις καὶ γίνονται μllч· ταῦτα μερίζω παρὰ τὸν чo καὶ γίνονται ωl δεύτερα ωч τρίτα· ταῦτα τὰ ωl δεύτερα συντίθημι τοῖς 9oλ δευτέροις καὶ γίνονται 9ω9· ταῦτα μερίζω παρὰ τὸν чo καὶ γίνονται lω πρῶτα ω9 δεύτερα· ταῦτα τὰ lω πρῶτα συντίθημι τοῖς lo$ πρώτοις καὶ γίνονται ll9· ταῦτα μερίζω παρὰ τὸν чo καὶ γίνονται μοῖραι γ παρὰ λεπτὸν πρῶτον ἕν· ταύτας τὰς μοίρας συντίθημι ταῖς $ μοίραις καὶ γίνονται ч· ἔχομεν δὲ καὶ ἐνταῦθα ἀντὶ τοῦ λείποντος ἑνὸς πρώτου ω9 δεύτερα, ἃ καὶ αὐτὰ παρ' ἓν δεύτερον ἕν εἰσιν πρῶτον· ἀντὶ δὲ τοῦ ἑνὸς δευτέρου πάλιν ἔχομεν τρίτα ωч τέταρτα 9 πέμπτα γω καὶ ἕκτα μl. οὐ μόνον δὲ εἰ ἐκ μοιρῶν τελείων ὁ ἀριθμὸς εἴη, δυνάμεθα κατὰ τήνδε τὴν μέθοδον ὡς ἐνταῦθα τοῦ ч εὑρεῖν τὴν πλευρὰν, ἀλλὰ κἂν ἀπὸ λεπτῶν καὶ πρώτων καὶ δευτέρων ἢ καὶ τρίτων συνκέηται, οἷον τῶν ч μοιρῶν καὶ γω πρώτων λεπτῶν καὶ ωo δευτέρων· πάντα γὰρ δεύτερα ποιοῦντες ἀνύσομεν τὸ ζητούμενον ἀρκούμενοι τῇ μέχρι δευτέρων λεπτῶν προϊούσῃ πλευρᾷ, ὡς ἐπὶ τοῦ προτέρου τετραγωνισμοῦ πεποιήκαμεν. τὸ δὲ μέχρι τρίτων, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου τετραγωνισμοῦ ἀπεδείξαμεν, ἢ καὶ ἐπέκεινα, περιττὸν καὶ περίεργον· τοῦτο μέντοι καθόλου εἰδέναι ὀφείλομεν,

ὡς ἕκαστον τῶν τμημάτων ὡς ἐπὶ τοῦ διαγράμματος τῆς αλ εὐθείας, τουτέστι τὰ αε, εβ, βλ δεῖ ἐφ' ἕκαστα τμήματα τῆς αμ πολλαπλασιάζειν εὐθείας τουτέστι τὰ αζ, ζγ, γμ, ἀλλ' ὅταν μὲν ὁποιονοῦν τῶν τμημάτων τῆς αλ εὐθείας ἐπὶ τμῆμα τῆς αμ μὴ ἶσον αὐτῷ πολλαπλασίαζηται, δὶς πολλαπλασιαζέσθω, ὡς ὅταν τὸ εβ ἐπὶ τὸ αζ· ὅταν δὲ ἐπὶ τὸ ἶσον αὐτῷ, ἅπαξ, ὡς ὅταν τὸ βλ ἐπὶ τὸ γμ. πορίζεται δὲ καὶ τοῦτο ἐντεῦθεν, ὅτι ἐπειδὰν τμῆμα ἐπὶ τμῆμα ἶσον αὐτῷ πολλαπλασιασθῇ, μέχρι τούτου ἵσταται καὶ οὐκέτι πρὸς ἄλλο μὴ ἶσον αὐτῷ πολλαπλασιάζεται· ὅταν ἐπὶ τὰ ἄνισα αὐτῷ πολλαπλασιάζηται, οὐ μέχρι τινὸς ἵσταται τούτων, ἀλλ' ὅταν ἐπὶ τὸ ἶσον αὐτῷ πολλαπλασιασθῇ, τότε ἵσταται τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Συμβέβηκε δὲ τῷδε τῷ διαγράμματι καί τινα θαυμαστὰ φυσικῇ ἁρμονίᾳ καὶ τάξει, ἅπερ εἰς μέσον προθῆναι ἴσως οὐκ ἄχαρι· καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὅλον ἐκ τετραγώνων καὶ παραλληλογράμμων συνέστηκε, τετραγώνων μὲν τῶν ακ, κδ, δν, παραλληλογράμμων δὲ τῶν βρ, εθ, θπ, ζη, ηο καὶ γξ· καὶ ὅτι τὰ μὲν τετράγωνα ἡ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ ν διαγώνιος δίχα τέμνει, διαγωνίως καὶ αὐτῶν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας κειμένων πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα παρ' ἑκάτερον κεῖται τῶν τετραγώνων, διαγωνίως μὲν πρὸς ἄλληλα καὶ αὐτα, οὐ μέντοι καὶ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· καὶ ὅτι εἰ μὲν ἡ πλευρὰ πρὸς ταῖς μοίραις καὶ πρώτων μόνων λεπτῶν ἐστιν, ἶσα γίνεται τῷ ἀριθμῷ τὰ παραλληλόγραμμα τοῖς τετραγώνοις, εἰ δὲ καὶ δευτέρων, διπλάσια, εἰ δὲ καὶ τρίτων, τριπλάσια, καὶ ἑξῆς μέχρις ἀπείρου. ἔπειτα ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τετράγωνα, ἰδίᾳ μὲν ἑκάτερα καὶ διαγωνίως κείμενα, ὡς ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ ν, τὰ ἀπὸ τῆς τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων τε καὶ δευτέρων καὶ ἑξῆς διαιρέσεως εἴδη ἓν παρ' ἓν ἐφεξῆς δέχεται, οἷον ὅτι τὸ μὲν ακ ἐστὶ μοιρῶν, τὸ δὲ κδ εὐθὺς οὐκέτι πρώτων λεπτῶν ἀλλὰ δευτέρων· τὸ δὲ δν οὐκέτι τρίτων ἀλλὰ τετάρτων· καὶ αὖθις τὸ μὲν ζη πρώτων, τὸ δὲ ηο οὐκέτι δευτέρων ἀλλὰ τρίτων· ἐπιμὶξ δὲ ἄμφω τά τε τετράγωνα καὶ παραλληλόγραμμα, καὶ διαγωνίως πάλιν ὡς ἀπὸ τοῦ μ ἐπὶ τὸ λ κείμενα, κατὰ τὴν φυσικὴν διαίρεσιν ἔχει τὰ εἴδη, μηδὲν διὰ μέσου παραλιμπάνοντα. καὶ ὅσα γε ἀλλήλων ἅπτονται κατὰ τὰς περὶ τὴν ἀπὸ τοῦ μ ἐπὶ τὸ λ διαγώνιον γωνίας, τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἰσὶν, οἷον ὅτι τὸ μὲν ζε ἐστὶ μοιρῶν, τὰ δὲ γκ, κθ εὐθὺς πρώτων λεπτῶν καὶ τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὰ δὲ μη, ηθ, θλ δευτέρων καὶ τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὰ δὲ ξδ, δρ τρίτων καὶ τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὸ

δὲ $\overline{οπ}$ τετάρτων· ὃ δὴ καὶ θαυμασιώτατα δείκνυσιν ἐναργῶς τάς τε μοίρας καὶ τὰ λεπτὰ ἐφεξῆς κείμενα. καὶ περὶ μὲν τούτων τοσαῦτα εἰρήσθω.

Ἑτέρα μέθοδος μίγμα οὖσα τῆς τε Ἰνδικῆς καὶ τοῦ Θέωνος καὶ τῆς ἡμετέρας· ἡ γὰρ προεκτεθεῖσα, ἥτις εὐθὺς ἀπαρχῆς τὰς μονάδας εἰς δεύτερα λεπτὰ ἀναλύει καὶ ἐξ ἐκείνων προηγουμένως λαμβάνει τὴν τοῦ ἔγγιστα τετραγώνου πλευρὰν, δυσχερεστάτη ἐστὶν ἐπὶ τῶν μεγίστων ἀριθμῶν. οἷον ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ὁ Θέων μεταχειρίζεται, τοῦ ʒωoo τούτου γὰρ εἰς δεύτερα λεπτὰ Iϥϥooooo ἀναλυομένου, δυσχερέστατόν ἐστιν, ὡς ἐκ πείρας ἔγνωμεν, τὴν ἐντεῦθεν λαβεῖν πλευράν. τί οὖν ποιῶ; λαμβάνω τὴν τοῦ σύνεγγυς τῶν ʒωoo τετραγώνου πλευρὰν, τὰ ϥν, λοιπὰ μένουσιν II· ταῦτα ἀναλύω εἰς πρῶτα λεπτὰ ϥϥo, καὶ διπλασιάζω τὰ ϥν καὶ γίνονται Iμʒ· ταῦτα παραβάλλω καὶ περὶ τὰ ϥϥo πρῶτα λεπτὰ καὶ γίνονται ἐκ τῆς παραβολῆς ʒ· τετράκις γὰρ τὰ Iμʒ, ωμϥ, λοιπὰ Iϒʒ· ταῦτα ἀναλύω εἰς δεύτερα νʒʒo, καὶ ἀφελὼν ἐξ αὐτῶν τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῶν ἀναφανέντων ἐκ τῆς παραβολῆς λεπτῶν δευτέρων $\overline{ις}$, καταλιμπάνεται νʒϒʒ· εἶτα ἀναλύω τὴν μὲν διπλῆν πλευρὰν, τὰ Iμʒ, εἰς πρῶτα λεπτὰ λoʒo καὶ προστίθημι τούτοις καὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς ʒ πρῶτα λεπτὰ δὶς γενόμενα λ καὶ γίνονται ὁμοῦ λεπτὰ πρῶτα λoʒλ· τὰ δὲ νʒϒʒ δεύτερα λεπτὰ ἀναλύω εἰς τρίτα ʒʒωʒʒo καὶ παραβάλλω πρὸς ταῦτα τὰ λoʒλ, καὶ γίνονται ἐκ τῆς παραβολῆς ωω· καὶ ἀποφαίνομαι τὸν ʒωoo ἀριθμὸν τετραγωνικὴν ἔχειν πλευρὰν μονάδας μὲν $\overline{\overline{ξζ}}$ πρῶτα λεπτὰ δ καὶ δεύτερα νε.

Ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ τετραγώνου μονάδος ἀφαιρουμένης, τὸ καταλιμπανόμενον μετρεῖται ὑπ' ἀριθμῶν δύο ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, τοῦ μὲν μονάδι ἐλάττονος τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς, τοῦ δὲ μονάδι μείζονος τῆς αὐτῆς πλευρᾶς· οἷον ἀπὸ τοῦ $\overline{λς}$ μονάδος ἀφαιρουμένης καταλείπεται $\overline{λε}$, ταῦτα δὲ μετρεῖται ὑπὸ τῶν $\overline{ε}$ καὶ $\overline{ζ}$, πεντάκις γὰρ τὰ $\overline{ζ}$, $\overline{λε}$· πάλιν ἐὰν ἀπὸ τῶν $\overline{λε}$ ἀφέλω τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ μόριον ἤτοι τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶ μονάδες $\overline{ε}$ καὶ ἔτι μονάδας $\overline{β}$, τὸ καταλειφθὲν ὅπερ ἐστὶν $\overline{κη}$ μετρεῖται ὑπὸ δύο πάλιν ἀριθμῶν, τοῦ μὲν δυσὶ μονάσιν ἐλάττονος τῆς εἰρημένης πλευρᾶς, τοῦ δὲ μονάδι μείζονος, τετράκις γὰρ τὰ $\overline{ζ}$, $\overline{κη}$. πάλιν ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\overline{κη}$ ἀφέλω μονάδας $\overline{γ}$ καὶ τὸ ἕβδομον αὐτῶν ὅπερ ἐστὶ $\overline{δ}$, τὸ καταλειφθὲν ὅπερ ἐστὶν $\overline{κα}$ μετρεῖται ὑπὸ τρισὶ μονάσιν ἐλάττονος τῆς πλευρᾶς καὶ τοῦ μονάδι μείζονος, τρὶς γὰρ τὰ $\overline{ζ}$, $\overline{κα}$. καὶ τοῦτο ἀεί. ἐξ ἧς μεθόδου τὸ παρὸν πρόβλημα λύεται.

*Θνήσκων τις ἐκάλεσε τοὺς ἰδίους υἱοὺς καὶ τὸ τοῦ χρυσίου κυβώτιον ἐκέλευσε κομισθῆναι, καὶ διετάξατο λέγων οὕτως· βούλομαι τοῖς ἐμοῖς υἱοῖς ἐξ ἴσου τὸν ἐμὸν διανεμεθῆναι χρυσίον· ὁ πρῶτος οὖν λαβέτω χρυσίον α καὶ τοῦ καταλειφθέντος τὸ ἕβδομον, ὁ δεύτερος χρυσία δύο καὶ τοῦ καταλειφθέντος τὸ ἕβδομον, ὁ τρίτος τρεῖς καὶ τοῦ καταλειφθέντος τὸ ἕβδομον· μεταξὺ δὲ λέγων ἐτελεύτησε μήτε περὶ πάντων διεξελθὼν τῶν υἱῶν μήτε περὶ τοῦ χρυσίου. θέλω μαθεῖν πόσοι τε ἦσαν οἱ υἱοὶ καὶ πόσον τὸ χρυσίον. ἐπειδὴ τοῦ ὑπολειπομένου ἀεὶ τὸ ἕβδομον πᾶσι καταλιμπάνεται τοῖς παισὶν, λαμβάνω τὸν μονάδι ἐλάττονα τοῦ ὁμωνύμου τῷ ἑβδόμῳ ἀριθμῷ τοῦ ζ τὸν ϛ καὶ πολλαπλασιάζω τοῦτον ἐφ᾽ ἑαυτὸν καὶ γίνεται λϛ· τοῦτόν φημι εἶναι τὸν ἀριθμὸν τοῦ χρυσίου, τὴν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ ἤτοι τὸν ϛ τὸν ἀριθμὸν τῶν παίδων· ἃ καὶ ἐπ᾽ ἴσης διανέμουσιν ἑαυτοῖς, ὁ πρῶτος γὰρ λαμβάνει α καὶ τῶν λε τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶ ε, α δὲ καὶ ε, ϛ, λοιπὰ λ· ἐκ τούτων ὁ δεύτερος λαμβάνει δύο καὶ τῶν κη τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶ δ, β δὲ καὶ δ, ϛ, λοιπὰ κδ· ἐκ τούτων ὁ τρίτος λαμβάνει γ καὶ τῶν κα τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶ γ, γ δὲ καὶ γ, ϛ, λοιπὰ ιη· ἐκ τούτων ὁ τέταρτος λαμβάνει τέσσαρα καὶ τῶν ιδ τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶ β, β δὲ καὶ δ, ϛ, λοιπὰ ιβ· ἐκ τούτων ὁ πέμπτος λαμβάνει ε καὶ τῶν ζ τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶ α, α δὲ καὶ ε, ϛ, λοιπὰ ϛ· ἐκ τούτων ὁ ἕκτος λαμβάνει τὰ ϛ καὶ τοῦ οὐδενὸς τὸ ἕβδομον ὅπερ ἐστὶν οὐδὲν, ϛ δὲ καὶ οὐδὲν ϛ. τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἐπὶ πάντων τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν γίνεται *).*

*Εὑρεῖν χωρίον χωρίου τῇ μὲν περιμέτρῳ ἴσον, τῷ δ᾽ ἐμβάδῳ πολλαπλάσιον. ἔστω δὴ τετράγωνον **). ποίει οὕτως· τὰ δ κύβισον ἐφ᾽ ἑαυτὰ, γίνονται ξδ· ἆρον μονάδα μίαν, λοιπὰ ξγ· τοσοῦτον ἔσονται ἑκάτεραι πλευραὶ τῶν δύο παραλληλογράμμων. διαστεῖλαι δὲ χρηστὰς πλευρὰς ποίει οὕτως· θὲς τὰ προτεθέντα δ καὶ ἆρον μονάδα μίαν ἐξ αὐτῶν, λοιπὰ τρία· ἐπεὶ οὖν ἑκάτεραι ὁμοῦ αἱ πλευραὶ ξγ εἰσὶν, ἔστω ἡ μὲν μία πλευρὰ θατέρου χωρίου γ, ἡ δὲ λοιπὴ ξ, καὶ τὸ ἐκ τούτων ρπ· τοῦ δὲ ἑτέρου χωρίου αἱ πλευραὶ εὑρίσκονται οὕτως· τὰ προτεθέντα δ ποίει ἐφ᾽ ἑαυτὰ, γίνονται ις· ἆρον μονάδα, λοιπὰ ιε· ἐπεὶ δὲ καὶ τούτου τοῦ χωρίου αἱ πλευραὶ ξγ εἰσὶν, ἔσται*

---

*) Hier endigt das Bruchstück im Codex Gudianus.

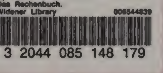
**) Ist in τετραπλάσιον zu verbessern.

ἡ μὲν μία πλευρὰ ιε, ἡ δὲ λοιπὴ μη, ἅπερ ὁμοῦ γίνονται ξγ· τὸ δὲ ἀπὸ τούτων ψκ· τὰ δὲ ψκ τετραπλάσιά ἐστι τῶν ρπ.

Ἀλλ' αὕτη μὲν μέθοδος, ἵνα μόνον εὑρήσεις τετραπλάσιον λόγον τὸν ῥηθέντα καὶ ἀπὸ μόνου τοῦ δ, καὶ τριπλάσιον καὶ πενταπλάσιον ἕνα μόνον ἀπὸ μόνου τοῦ γ καὶ μόνου τοῦ ε, ἕτερον δὲ οὐδένα, ἡμεῖς δ' ἐκθησόμεθα μέθοδον ἥτις ἐκ παντὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ πάντα ὃν βούλει πολλαπλάσιον λόγον εὑρήσει. ἔστι δὲ αὕτη· λαβὲ ὅντινα βούλει ἀριθμὸν καὶ τούτου ἕτερον πολλαπλάσιον, ἐν μὲν τριπλασίῳ τῷ ζητουμένῳ ἐμβάδῳ τετραπλάσιον, ἐν δὲ τετραπλασίῳ πενταπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως ἀεὶ μονάδα μείζονα· εἶτα λαβὲ τρίτον ἀριθμὸν τοσαπλάσιον τοῦ πρώτου ὁπόσος ἐστὶν ὁ τετράγωνος ὁ ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ ζητουμένου ἐμβάδου γινόμενος, ἐν μὲν τριπλασίῳ τῷ ἐμβάδῳ ἐννεαπλάσιον, ἐν δὲ τετραπλασίῳ ἑξκαιδεκαπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· εἶτα λαβὲ τέταρτον ἀριθμὸν τοσαπλάσιον τοῦ δευτέρου, ὁσαπλάσιόν ἐστιν τὸ ζητούμενον ἔμβαδον, καὶ ἔσται τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου πολλαπλάσιον τοῦ ἀπὸ πρώτου καὶ τετάρτου ὁπόσον προέθου· οἷον βούλομαι εὑρεῖν χωρίον χωρίου τῇ μὲν περιμέτρῳ ἴσον, τῷ δὲ ἐμβάδῳ τριπλάσιον. [λαβὲ τὸν β, καὶ] μονάδι μειζόνως τοῦ ζητουμένου τριπλασίου ἐμβάδῳ τὸν η, καὶ τρίτον ἀριθμὸν ἐννεαπλάσιον τοῦ πρώτου, διὰ τὸ τρὶς τὰ τρία ἐννέα τοῦ τριπλασίου ἐμβάδου τὸν ιη, καὶ ἔτι τέταρτον ἀριθμὸν τριπλάσιον τοῦ δευτέρου διὰ τὸ τριπλάσιον ἔμβαδον τὸν κδ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν περίμετρος τῶν χωρίων ἴση, η γὰρ καὶ ιη, κϛ, καὶ πάλιν β καὶ κδ, κϛ, τὰ δὲ ρμδ τῶν μη τριπλάσια, ἅπερ εἰσὶ τὰ ἔμβαδα.

Druckfehler im griechischen Text.

Seite 1. Zeile 1. ist das Komma vor *ἐπεὶ* zu setzen. — S. 3. Z. 3. für *ἐξῆς* lies *ἑξῆς*. — S. 3. Z. 21. f. *ἐξακισχιλία* l. *ἑξακισχίλια*. — S. 3. Z. 23. f. *εἰπών* l. *εἰπεῖν*. — S. 3. letzte Zeile für *γένεται* l. *γίνεται*. — S. 4. Z. 12. f. *ταύτα* l. *ταῦτα*. — S. 6. Z. 7. f. *πρωτῳ* l. *πρώτῳ*. — S. 6. Z. 9. f. *δύνῇ* l. *δύνῃ*. — S. 13 Z. 13. f. *διχαδικὸς* l. *δεκαδικός*. — S. 8. Z. 1. f. *προστέθῃ* l. *προστεθῇ*. — S. 8. Z. 2. von unten für *τὰ* μ l. *τὰ* ω, und für V l. Λ. — S. 9. Z. 6. f. *δανεῖσαι* l. *δανεῖσαι*. — S. 11. Z. 5. von unten f. *δεῦτερον* l. *δεύτερον*. — S. 11. Z. 4. von unten lies. *ἔτι τὸν βον ἐπὶ τὸν βον*. — S. 12. Z. 13. f. *εἰσιν* l. *εἰσὶν*. — S. 12. Z. 18. f. *ἔκτο* l. *ἔκτου*. — S. 12. Z. 20. f. *ὁ δύο* l. *οἱ δύο*. — S. 13. Z. 3. f. *γίνεται* l. *γίνηται*. — S. 14. Z. 4. f. *εριττόν* l. *περιττὸν*. — S. 14. Z. 5. f. *ἀμμφ* l. *ἄμμφ*. — S. 16. Z. 1. f. *γένεται* l. *γίνεται*. — S. 16. Z. 15. f. *ταύτῆς* l. *ταύτης*. — S. 16. Z. 19. f. *δύνατον* l. *δυνατὸν*. — S. 17. Z. 20. f. *τμηθεῖς* l. *τμηθείς* — S. 18. Z. 6. f. *ἑκάσῃ* l. *ἑκάστῃ*. — S. 18. Z. 9. *παντάκις* l. *πεντάκις*. — S. 22. Z. 1 von unten f. *νστερον* l. *ὕστερον*. — S. 23. Z. 10. f. *γένεσθαι* l. *γενέσθαι*.



...ss Rechenbuch.
...idener Library
006544839
3 2044 085 148 179